

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 27, 2026
Artigo de Pesquisa

Jefferson Barbosa de Lima

Universidade Federal de Ouro Preto
(UFOP), Ouro Preto

Aldo Trajano Lourêdo

Universidade Estadual da Paraíba
(UEPB), Campina Grande,
aldo@servidor.uepb.edu.br

Explorando teoremas clássicos de Geometria com visualização em Python/Manim e aplicações em problemas olímpicos

Exploring classical Geometry theorems with visualization in
Python/Manim and applications in olympiad problems

Resumo

Neste artigo, exploramos três resultados clássicos da geometria euclidiana: o Teorema de Viviani, o Ponto de Fermat e o Teorema de Napoleão. Para cada um, apresentamos demonstrações e discutimos suas aplicações na resolução de problemas de olimpíadas e competições de matemática. Como recurso visual, utilizamos figuras elaboradas em TikZ ($\text{\LaTeX}$) e animações desenvolvidas com a biblioteca Manim em Python, visando facilitar a compreensão dos teoremas e problemas abordados.

Palavras-chave: Python; Manim; Teorema de Viviani; Ponto de Fermat; Teorema de Napoleão; Problemas Olímpicos.

Abstract

In this article, we explore three classical results of Euclidean geometry: Viviani's Theorem, the Fermat Point, and Napoleon's Theorem. For each one, we present proofs and discuss their applications in solving problems from mathematical olympiads and competitions. As a visual resource, we use figures created in TikZ ($\text{\LaTeX}$) and animations developed with the Manim library in Python, aiming to facilitate the understanding of the theorems and problems addressed.

Keywords: Python; Manim; Viviani's Theorem; Fermat Point; Napoleon's Theorem; Olympiad Problems.



1 Introdução

A geometria euclidiana desempenha um importante papel no desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade matemática. Obras como *Geometry Revisited* de Coxeter e Greitzer [1] e *Charming Proofs* de Alsina e Nelsen [2] enfatizam não apenas a resolução de problemas, mas a beleza das estruturas geométricas. Entretanto, autores como Arcavi [3] ressaltam que a representação visual é decisiva para o aprendizado. Sob essa ótica, apesar da riqueza dessas obras impressas, elas ainda dependem de ilustrações estáticas.

Historicamente, a visualização sempre foi uma ferramenta essencial na geometria, tradicionalmente, figuras estáticas em papel ou quadro-negro servem como suporte para o raciocínio dedutivo, porém, com o avanço da tecnologia, *softwares* de geometria dinâmica passaram a permitir a manipulação de figuras e a observação do movimento dos elementos matemáticos em tempo real. Mais recentemente, a biblioteca Mathematical Animation Engine (Manim) desenvolvida em Python por Grant Sanderson para o canal *3Blue1Brown* [4] popularizou a aplicação da visualização programática, método que se diferencia das ferramentas tradicionais de manipulação direta ao construir cenas geométricas por meio de instruções de código e algoritmos, permitindo assim um controle preciso e uma estética visual que facilita a compreensão de conceitos abstratos.

Dessa forma, nosso objetivo neste artigo é investigar três resultados clássicos da geometria plana: o Teorema de Viviani, o Ponto de Fermat e o Teorema de Napoleão. Para cada teorema, apresentamos uma demonstração e uma animação feita com o Manim para auxiliar no entendimento desses teoremas. Além disso, mostramos como esses resultados podem ser aplicados na resolução de problemas de competições matemáticas, como a Princeton University Mathematics Competition (PUMaC) [5], a International Mathematical Olympiad (IMO) [6] e a Olimpíada Paulista de Matemática (OPM) [7]. É importante ressaltar que as resoluções dos problemas estão dispostas tanto em formato textual no artigo quanto em vídeos animados, evidenciando a relevância desses resultados em contextos de alto desempenho.

É importante esclarecer que as demonstrações utilizam conceitos de geometria euclidiana clássica, acessíveis a estudantes do ensino médio. As animações e os códigos-fonte utilizados neste trabalho estão disponíveis para consulta e download no repositório GitHub dos autores: Códigos e Animações.

A estrutura deste artigo é organizada da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos brevemente a biblioteca Manim. Na Seção 3, exploramos os três teoremas com suas demonstrações, aplicações e visualizações. Na Seção 4, apresentamos as conclusões de nosso estudo.

2 O Manim e a Visualização Geométrica

A visualização desempenha um papel fundamental na aprendizagem da matemática, não apenas como um meio de ilustração, mas como um componente essencial do raciocínio. Zimmermann e Cunningham [8] a descrevem como o processo de produzir ou utilizar representações geométricas e gráficas para comunicar e explorar conceitos matemáticos. Nesse sentido, Guzmán [9] destaca que os conceitos matemáticos são ricos em relações visuais, ele argumenta que o uso de representações concretas, prática que denomina visualização matemática, é uma estratégia eficaz para tornar as abstrações complexas da disciplina mais acessíveis.

Contudo, as representações estáticas apresentam limitações, especialmente ao lidarmos com propriedades que se conservam durante o movimento. Em uma imagem fixa, torna-se desafiador perceber que determinada relação, como a soma de distâncias ou a forma de um triângulo, permanece

inalterada enquanto outros elementos variam. A visualização dinâmica supera essa barreira, tornando evidente o que, de outra forma, exigiria um considerável esforço de abstração.

O Manim surge nesse contexto como uma ferramenta moderna de visualização programática. Originalmente desenvolvida por Grant Sanderson para criar os vídeos do canal *3Blue1Brown*, a biblioteca tornou-se um projeto de código aberto mantido por uma comunidade ativa [10]. Enquanto softwares consagrados como o GeoGebra são excelentes para a exploração interativa e também permitem a criação de animações, o Manim se distingue por sua abordagem baseada em código Python, voltada especificamente para a produção de vídeos expositivos com alto controle sobre a narrativa visual.

Devido ao seu potencial estético, o Manim tem sido amplamente adotado na divulgação científica em redes sociais e plataformas de vídeo, estabelecendo um novo padrão visual para conteúdos educativos online. A fluidez das animações e a clareza do design gráfico tornam os conceitos geométricos mais atraentes, capturando a atenção do espectador, ao apresentar as transformações de maneira contínua e visualmente agradável, a ferramenta facilita a assimilação de ideias abstratas.

Neste trabalho, empregamos o Manim para criar visualizações dinâmicas do Teorema de Viviani, do Ponto de Fermat e do Teorema de Napoleão, bem como para ilustrar as soluções dos problemas olímpicos abordados. O objetivo dessas animações é tornar os conceitos geométricos mais acessíveis, permitindo ao leitor observar o comportamento das construções em movimento e desenvolver uma compreensão intuitiva das propriedades apresentadas.

Essa metodologia alinha-se às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [11], que, em sua Competência Geral 5, enfatiza a importância de compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de forma crítica e significativa. No âmbito da Matemática, a BNCC incentiva o uso de recursos tecnológicos não apenas para a construção de figuras, mas também para a investigação de propriedades e a validação de conjecturas, promovendo uma aprendizagem mais ativa e investigativa.

3 Teoremas escolhidos

Os três teoremas apresentados nesta seção, o Teorema de Viviani, o Ponto de Fermat e o Teorema de Napoleão, podem à primeira vista parecer resultados independentes, mas estão de certa forma, conectados. A demonstração do Ponto de Fermat que apresentaremos utiliza o Teorema de Viviani como lema e reforça essa relação, por outro lado, a construção de triângulos equiláteros externos sobre os lados de um triângulo, essencial tanto para o Ponto de Fermat quanto para o Teorema de Napoleão, mostra que as circunferências circunscritas a esses equiláteros se encontram exatamente no Ponto de Fermat, enquanto os centros dessas circunferências formam o Triângulo de Napoleão, o que evidencia a ligação geométrica entre esses resultados. Vale salientar que normalmente esses resultados não são apresentados na literatura dessa forma.

3.1 Teorema de Viviani

Vincenzo Viviani (1622–1703) foi um matemático e cientista italiano, nascido em Florença. Ele é amplamente reconhecido como o último discípulo de Galileu Galilei, com quem conviveu e colaborou nos anos finais da vida do mestre em Arcetri. Essa proximidade influenciou sua carreira, levando-o a dedicar grande parte de sua vida à preservação e publicação da obra de Galileu [12].

Além de sua conexão com Galileu, Viviani trabalhou com Evangelista Torricelli, em que colaborou com o famoso experimento que levou à invenção do barômetro. Na matemática, Viviani

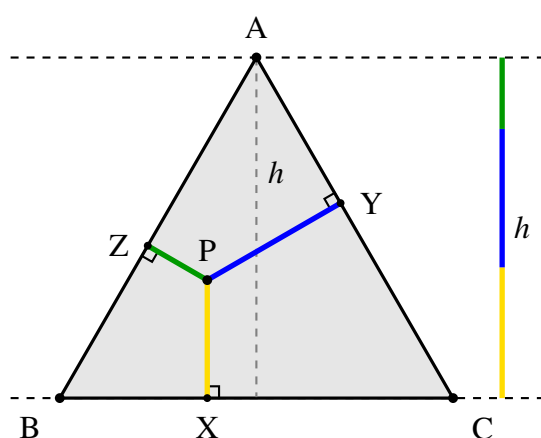
destacou-se pela reconstrução de obras perdidas da antiguidade grega, como os trabalhos de Apolônio e Aristeu. Em 1659, Viviani publicou a solução de Torricelli para o problema do Ponto de Fermat, curiosamente. Essa solução utiliza o fato de que a soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo equilátero aos seus lados é constante, resultado hoje conhecido como Teorema de Viviani [13]. Apresentamos o teorema a seguir.

Teorema 1 (Teorema de Viviani). *Seja ABC um triângulo equilátero e P um ponto em seu interior. Sejam*

$$\overline{PZ} \perp \overline{AB}, \quad \overline{PX} \perp \overline{BC}, \quad \overline{PY} \perp \overline{AC}$$

as distâncias perpendiculares de P aos lados do triângulo ABC (Figura 1).

Figura 1: Visualização do Teorema de Viviani



Fonte: Os autores

Então,

$$\overline{PZ} + \overline{PX} + \overline{PY} = h,$$

em que h é a altura do triângulo equilátero ABC .

Demonstração. Seja ABC um triângulo equilátero de lado a e altura h . Denotemos por

$$\overline{PZ} \perp \overline{AB}, \quad \overline{PX} \perp \overline{BC}, \quad \overline{PY} \perp \overline{AC}$$

as distâncias perpendiculares do ponto interior P aos lados do triângulo. A partir dessas projeções, são determinados os triângulos ABP , BCP e CAP , conforme ilustrado na Figura 2.

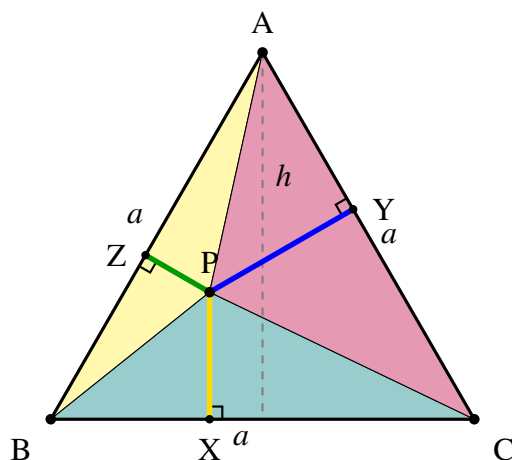
A área do triângulo ABC , denotada por $[ABC]$, pode ser calculada de duas maneiras. Primeiro, usando a base $\overline{BC}$ e a altura correspondente, a qual é denotada por h , temos

$$[ABC] = \frac{a \cdot h}{2}. \quad (1)$$

Por outro lado, a área de ABC é também a soma das áreas dos três triângulos ABP , BCP e CAP (ver Figura 2). Cada um desses triângulos tem base igual a a (pois cada lado de ABC mede a) e altura igual à distância perpendicular de P ao lado correspondente. Assim,

$$[ABP] = \frac{a \cdot \overline{PZ}}{2}, \quad [BCP] = \frac{a \cdot \overline{PX}}{2}, \quad [CAP] = \frac{a \cdot \overline{PY}}{2}. \quad (2)$$

Figura 2: Prova do Teorema de Viviani usando áreas



Fonte: Os autores

A partir de (2), obtemos:

$$[ABC] = [ABP] + [BCP] + [CAP] = \frac{a \cdot \overline{PZ}}{2} + \frac{a \cdot \overline{PX}}{2} + \frac{a \cdot \overline{PY}}{2} = \frac{a}{2} (\overline{PZ} + \overline{PX} + \overline{PY}). \quad (3)$$

Igualando as duas expressões para a área do triângulo ABC , dadas por (1) e (3), resulta

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} (\overline{PZ} + \overline{PX} + \overline{PY}).$$

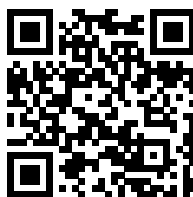
Como $a > 0$, podemos dividir ambos os lados por $\frac{a}{2}$, concluímos

$$\overline{PZ} + \overline{PX} + \overline{PY} = h.$$

□

Foi construída uma animação utilizando a biblioteca Manim para o Teorema de Viviani, que ilustra de forma dinâmica a propriedade invariante enunciada. O leitor pode escanear o Qrcode da Figura 3, ou simplesmente clicar sob a figura para visualizar a animação na plataforma do YouTube.

Figura 3: Animação do Teorema de Viviani no YouTube



Fonte: Os autores

Nessa animação, um ponto P se move livremente no interior do triângulo equilátero, enquanto as três distâncias perpendiculares aos lados são representadas por segmentos coloridos. À medida que

P percorre diferentes posições, os comprimentos individuais de cada segmento variam mas a soma total permanece constante e igual à altura h do triângulo, ou seja, o espectador pode observar que, independentemente de quão próximo P esteja de um vértice ou de um lado, a “barra” representando a soma das distâncias mantém-se inalterada. Tal constatação visual pode preparar o terreno para o entendimento do Teorema.

O Teorema de Viviani pode ser empregado na demonstração de diversos outros resultados e aparece com frequência em provas de competições e olimpíadas de matemática. Como exemplo, vejamos um problema da PUMaC 2013, no qual o teorema pode ser utilizado para obter a solução.

Problema 1 (PUMaC 2013). *Dados um triângulo equilátero ABC e um ponto $P \in \Gamma$ em que Γ é a circunferência inscrita no triângulo ABC . Se as duas menores distâncias desse ponto às laterais do triângulo são 1 e 4, então o lado desse triângulo equilátero pode ser expresso como $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, em que $\text{mdc}(a, c) = 1$ e b não é divisível pelo quadrado de nenhum inteiro maior que 1. Determine $a + b + c$.*

Solução. Sejam d_1, d_2, d_3 as distâncias de P aos lados do triângulo ABC , com

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3.$$

Pelo enunciado, as duas menores distâncias são 1 e 4, logo

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 4.$$

Denotemos por r o raio da circunferência inscrita ao triângulo. Como o triângulo é equilátero, o Teorema de Viviani afirma que, para qualquer ponto interior, em particular para P , obtemos

$$d_1 + d_2 + d_3 = h,$$

em que h é a altura do triângulo. Por outro lado, para um triângulo equilátero vale a relação $h = 3r$, sendo r o raio da circunferência inscrita no triângulo ABC . Assim,

$$d_1 + d_2 + d_3 = 3r \quad \Rightarrow \quad d_3 = 3r - d_1 - d_2 = 3r - 5. \quad (4)$$

Agora analisemos a posição de P apenas com ângulos (veja a Figura 4).

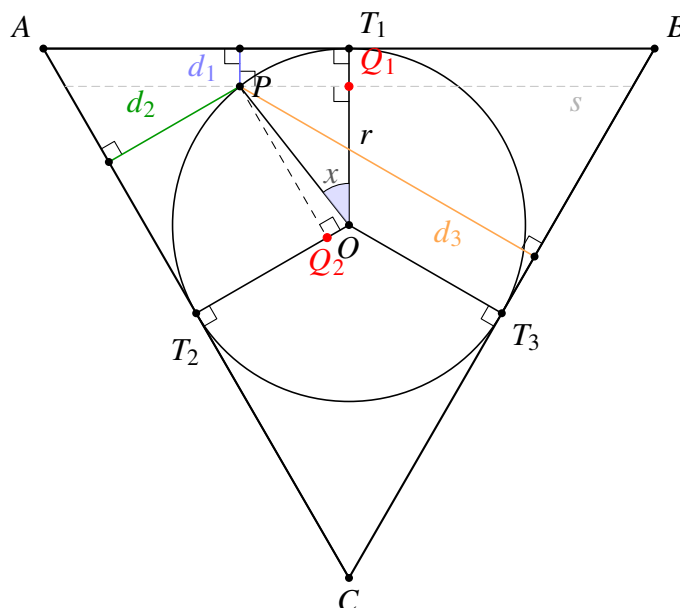
Seja O o centro da circunferência inscrita ao triângulo e denote por T_1, T_2, T_3 os pontos de tangência com os lados AB, AC e BC , respectivamente. Os segmentos $\overline{OT_1}, \overline{OT_2}$ e $\overline{OT_3}$ partem de O , são perpendiculares aos lados do triângulo e formam entre si ângulos de 120° . Defina x como o ângulo entre $\overline{OP}$ e $\overline{OT_1}$. Como P pertence à circunferência inscrita, $\overline{OP} = r$. Seja ainda Q_1 o pé da projeção de P sobre $\overline{OT_1}$, de modo que $\overline{PQ_1}$ é perpendicular a $\overline{OT_1}$ (e portanto paralela a $\overline{AB}$).

A distância de O até o lado $\overline{AB}$ vale r , a distância até a reta s , que é paralela a $\overline{AB}$ e passa por P (mostrada na figura 4) vale $r \cos x$, que é a medida do cateto adjacente do triângulo retângulo OQ_1P em relação ao ângulo x . Logo $\overline{Q_1T_1} = d_1$, pode ser escrito como

$$d_1 = r - r \cos x = r(1 - \cos x). \quad (5)$$

Como os ângulos formados pelos segmentos $\overline{OT_1}, \overline{OT_2}$ e $\overline{OT_3}$ são de 120° , o ângulo entre $\overline{OP}$ e $\overline{OT_2}$ é $120^\circ - x$. Se Q_2 for o pé da perpendicular de P sobre $\overline{OT_2}$, o triângulo OPQ_2 também é retângulo

Figura 4: Representação geométrica Problema 1



Fonte: Os autores

em Q_2 , com $\overline{OQ_2} = r \cos(120^\circ - x)$. Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{PQ_2}$ são paralelos, logo d_2 é, como antes, a diferença $r - \overline{OQ_2}$, isto é,

$$d_2 = r(1 - \cos(120^\circ - x)). \quad (6)$$

Usando $d_1 = 1$ na equação (5), obtemos

$$\cos x = 1 - \frac{1}{r}. \quad (7)$$

Substituindo $d_2 = 4$ em (6) e usando o cosseno da diferença, obtemos $\cos(120^\circ - x) = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$,

$$1 - \frac{4}{r} = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x. \quad (8)$$

Substituindo (7), na equação (8)

$$\sin x = \frac{3r - 9}{\sqrt{3}r}. \quad (9)$$

Aplicando a relação fundamental da trigonometria ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) e usando (7) e (9),

$$\left(\frac{3r - 9}{\sqrt{3}r}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 = 1 \Rightarrow 3r^2 - 20r + 28 = 0.$$

Portanto

$$r = \frac{14}{3} \quad \text{ou} \quad r = 2.$$

Agora usamos novamente a informação sobre as distâncias. Da relação (4),

$$d_3 = 3r - 5.$$

Se $r = 2$, teríamos $d_3 = 1$, e as duas menores distâncias seriam ambas iguais a 1, contrariando o enunciado. Logo,

$$r = \frac{14}{3} \Rightarrow d_3 = 3r - 5 = 9.$$

Assim, as três distâncias são 1, 4, 9, pela relação de Viviani:

$$1 + 4 + 9 = 14 = 3r.$$

Por fim, em um triângulo equilátero de lado l e raio da circunferência inscrita igual a r , vale

$$3r = \frac{l\sqrt{3}}{2},$$

resultado que também pode ser obtido pelo Teorema de Viviani. Assim,

$$r = \frac{l\sqrt{3}}{6} \Rightarrow l = \frac{6r}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \frac{14}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{28\sqrt{3}}{3}.$$

Como $\text{mdc}(28, 3) = 1$ e 3 não é divisível pelo quadrado de nenhum inteiro maior que 1, as condições do enunciado são satisfeitas, temos que $a = 28$, $b = 3$ e $c = 3$. Logo:

$$a + b + c = 28 + 3 + 3 = 34.$$

□

Figura 5: Animação do Problema 1 no YouTube



Fonte: Os autores

Uma animação da solução do Problema 1 foi disponibilizada no YouTube, para acessá-la, basta escanear ou clicar no QR Code da Figura 5.

3.2 Ponto de Fermat

Pierre de Fermat (1601–1665) foi um advogado e oficial do governo francês, nascido em Beaumont-de-Lomagne. Embora sua profissão fosse na área jurídica, atuando como conselheiro no parlamento de Toulouse, Fermat é mais lembrado por suas contribuições fundamentais à Matemática, especialmente na Teoria dos Números e nos fundamentos do Cálculo [14]. Ele manteve correspondência com importantes matemáticos de sua época, como Mersenne e Carcavi, compartilhando suas descobertas sobre máximos, mínimos, tangentes a curvas e Teoria dos Números. Seu trabalho frequentemente envolvia desafiar outros matemáticos a resolver problemas que ele já havia solucionado [15].

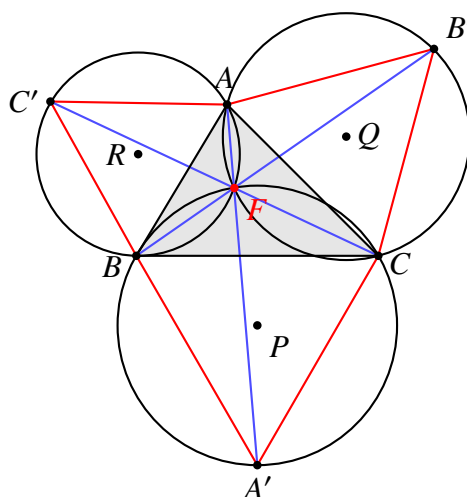
O famoso *Último Teorema de Fermat*, enunciado por Pierre de Fermat no século XVII e demonstrado apenas em 1995 por Andrew Wiles, é um dos resultados mais conhecidos associados ao seu nome. Entretanto, Fermat também apresentou importantes contribuições para a Geometria, dentre elas o *Ponto de Fermat*, considerado um problema clássico de otimização na geometria plana. O ponto de Fermat consiste no seguinte problema: dado um triângulo, deseja-se encontrar o ponto que minimiza a soma das distâncias aos três vértices. Veremos posteriormente que esse ponto possui uma caracterização geométrica elegante: os ângulos formados pelos segmentos que ligam esse ponto aos vértices do triângulo são todos iguais a 120° , desde que nenhum ângulo interno do triângulo exceda 120° . Esse problema foi proposto originalmente por Fermat em uma carta privada a Evangelista Torricelli [13]. Torricelli resolveu o problema, e por essa razão, o ponto é também chamado de *ponto de Fermat-Torricelli*. Vejamos alguns resultados a seguir sobre esse interessante problema.

Teorema 2 (Existência do Ponto de Fermat). *Dado um triângulo ABC com todos os ângulos internos menores que 120° , existe um ponto F no interior do triângulo, denominado Ponto de Fermat, tal que:*

$$\angle A\hat{F}B = \angle B\hat{F}C = \angle C\hat{F}A = 120^\circ.$$

Demonstração. Para demonstrar a existência, construímos triângulos equiláteros externos sobre os lados do triângulo ABC . Sejam $\triangle BCA'$, $\triangle ACB'$ e $\triangle ABC'$ esses triângulos. Considere as circunferências circunscritas a esses equiláteros, com centros respectivamente dados por P , Q e R . As circunferências de centros Q e R intersectam-se em dois pontos: um deles é o próprio vértice A , e o outro denotamos por F (Figura 6). Vamos mostrar que esse ponto F também pertence à circunferência de centro P .

Figura 6: Ponto de Fermat via Triângulos Equiláteros



Fonte: Adaptado de [16]

Observe que, na circunferência de centro R , construída sobre o triângulo equilátero externo ao lado $\overline{AB}$ ($\triangle ABC'$), o arco maior $\widehat{AC'B}$ possui medida 240° . Pelo *Teorema do Ângulo Inscrito*, qualquer

ângulo inscrito que intercepta um arco tem medida igual à metade da medida desse arco. Assim, como $\widehat{AC'B} = 240^\circ$, o ângulo inscrito correspondente satisfaz

$$\angle A\hat{F}B = \frac{1}{2}\widehat{AC'B} = 120^\circ.$$

De modo análogo, na circunferência de centro Q , construída sobre o triângulo equilátero externo ao lado $\overline{AC}$ ($\triangle ACB'$), o arco maior $\widehat{AB'C}$ também mede 240° . Logo,

$$\angle A\hat{F}C = \frac{1}{2}\widehat{AB'C} = 120^\circ.$$

Como a soma dos ângulos completos em torno de um ponto é 360° , obtemos imediatamente

$$\angle B\hat{F}C = 360^\circ - (120^\circ + 120^\circ) = 120^\circ.$$

Por sua vez, a circunferência de centro P é circunscrita ao triângulo equilátero $\triangle BCA'$; portanto, ela é o *lugar geométrico dos pontos que enxergam o segmento $\overline{BC}$ sob um ângulo inscrito de 120°* . Como já estabelecemos que

$$\angle B\hat{F}C = 120^\circ,$$

segue que o ponto F pertence também a essa circunferência.

Assim, as três circunferências circunscritas são concorrentes no ponto F . E como, nesse ponto, verificam-se simultaneamente

$$\angle A\hat{F}B = \angle B\hat{F}C = \angle C\hat{F}A = 120^\circ,$$

concluimos que F é o *ponto de Fermat* de $\triangle ABC$. □

Vale destacar que existem outras demonstrações desse teorema na literatura matemática, construídas a partir de diferentes abordagens geométricas.

Proposição 1. *Os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ têm o mesmo comprimento e concorrem no ponto F .*

Demonstração. Usaremos como auxílio a Figura 6 novamente. Primeiramente, vamos mostrar que os segmentos têm o mesmo comprimento. Considere os triângulos $\triangle ABA'$ e $\triangle C'BC$. Temos $\overline{AB} = \overline{C'B}$ (lados de $\triangle ABC'$), $\overline{BA'} = \overline{BC}$ (lados de $\triangle BCA'$) e $\angle A\hat{B}A' = \angle A\hat{B}C + 60^\circ = \angle C'\hat{B}C$. Pelo caso de congruência LAL (Lado, Ângulo, Lado), $\triangle ABA' \equiv \triangle C'BC$, logo $\overline{AA'} = \overline{CC'}$. Analogamente, prova-se que $\overline{BB'} = \overline{AA'}$. Portanto, $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.

Agora, vamos demonstrar a concorrência. Recorde que F é o ponto de interseção das circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros externos. Considere a circunferência circunscrita a $\triangle BCA'$. Como F , B , A' e C pertencem a essa mesma circunferência, o quadrilátero $FBA'C$ é dito cíclico. Logo,

$$\angle B\hat{F}A' = \angle B\hat{C}A' = 60^\circ,$$

pois são ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco $\widehat{BA'}$.

Como já sabemos pelo Teorema 2 que $\angle A\hat{F}B = 120^\circ$, temos:

$$\angle A\hat{F}A' = \angle A\hat{F}B + \angle B\hat{F}A' = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Isso prova que os pontos A , F e A' são colineares. O mesmo raciocínio aplica-se aos segmentos $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$, demonstrando que as retas que ligam os vértices do triângulo ABC aos vértices dos triângulos equiláteros opostos concorrem em F . □

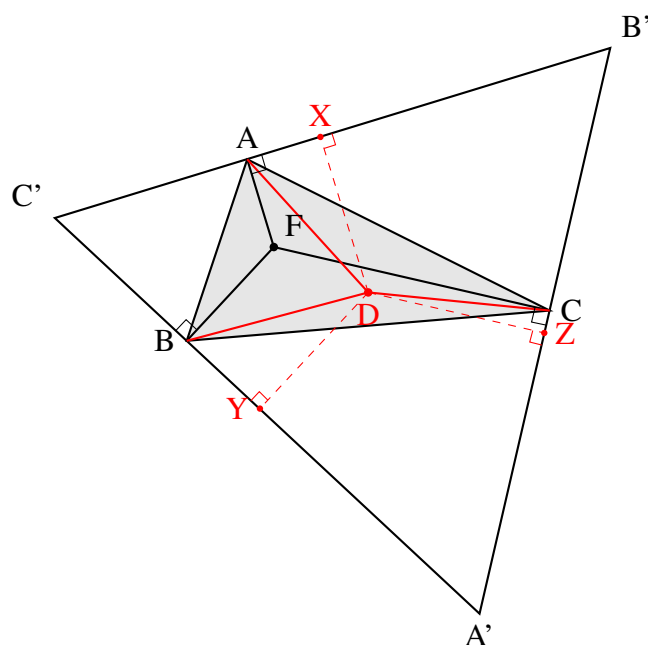
A seguir, demonstraremos a propriedade central que motivou a investigação histórica deste ponto, ele é a solução para o problema de minimizar a soma das distâncias aos vértices do triângulo.

Teorema 3 (Ponto de Fermat como mínimo de distância). *Se F é o ponto do triângulo ABC para o qual os ângulos subtendidos são todos de 120° , então, para qualquer ponto D interior ao triângulo e distinto de F ,*

$$\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} < \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}.$$

Demonstração. Tracemos por A , B e C as perpendiculares a $\overline{AF}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CF}$, respectivamente. Esses três segmentos se encontram formando um triângulo $A'B'C'$ contendo F em seu interior. Sejam $\overline{DX}$, $\overline{DY}$ e $\overline{DZ}$ as perpendiculares traçadas de um ponto D qualquer aos lados de $A'B'C'$ (Figura 7).

Figura 7: Figura auxiliar utilizada na demonstração do Ponto de Fermat



Fonte: Os autores

Note que o triângulo $A'B'C'$ é equilátero, pois, olhando para o quadrilátero $AFCB'$, como $\angle A\hat{F}C = 120^\circ$, $\angle F\hat{A}B' = 90^\circ$ e $\angle B'\hat{C}F = 90^\circ$, então

$$\angle C\hat{B}'A = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$$

De modo análogo, usando os quadriláteros $AFBC'$ e $FBA'C$, chegamos em $\angle A\hat{C}'B = 60^\circ$ e $\angle B\hat{A}'C = 60^\circ$. Consideremos a altura do $\triangle A'B'C'$ sendo h . Pelo Teorema de Viviani,

$$\overline{DX} + \overline{DY} + \overline{DZ} = h$$

e

$$\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} = h.$$

Logo,

$$\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} = \overline{DX} + \overline{DY} + \overline{DZ}. \quad (10)$$

Por outro lado, a menor distância de um ponto a uma reta é sempre a distância perpendicular, assim

$$\overline{DX} < \overline{DA}, \quad \overline{DY} < \overline{DB}, \quad \overline{DZ} < \overline{DC},$$

o que implica

$$\overline{DX} + \overline{DY} + \overline{DZ} < \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}.$$

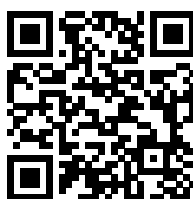
Substituindo (10) na desigualdade acima, obtemos

$$\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} < \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC}.$$

□

O leitor talvez se pergunte por que, antes do Teorema 3, consideramos a configuração em que todos os ângulos internos de $\triangle ABC$ são menores que 120° . Essa hipótese garante que o ponto obtido pela construção esteja no interior do triângulo e satisfaça a caracterização angular apresentada. Quando essa condição não é satisfeita, isto é, quando algum ângulo interno é maior ou igual a 120° , o ponto de Fermat deixa de ser um ponto interior equiangular. Nesse caso, conforme Simons [17], o ponto que minimiza a soma das distâncias aos três vértices é o próprio vértice desse ângulo. Como recurso didático para acompanhar a construção geométrica, disponibilizamos, no QR Code da Figura 8, uma animação construída para visualizar o ponto de Fermat apresentado anteriormente.

Figura 8: Animação do Ponto de Fermat no YouTube



Fonte: Os autores

A animação do Ponto de Fermat apresenta a construção geométrica em etapas progressivas, inicialmente exibindo o triângulo ABC , em seguida construindo os três triângulos equiláteros externos sobre cada lado, com cores distintas para facilitar a identificação, e por fim traçando os segmentos que formam o ponto de Fermat conforme discutido anteriormente.

O problema a seguir é oriundo da renomada IMO, edição de 2002, constando na *Shortlist* de Geometria (G2).

Problema 2 (IMO 2002 - Shortlist). *Seja ABC um triângulo para o qual existe um ponto interior F tal que $\angle A\hat{F}B = \angle B\hat{F}C = \angle C\hat{F}A$. Sejam as retas $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ interceptando os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ em D e E , respectivamente. Prove que*

$$\overline{AB} + \overline{AC} \geq 4\overline{DE}.$$

A solução apresentada a seguir foi inspirada na solução proposta em [18].

Solução. Perceba que o ponto F é o *ponto de Fermat*, pois a condição $\angle A\hat{F}B = \angle B\hat{F}C = \angle C\hat{F}A$ implica que cada um desses ângulos mede 120° , pois sua soma é 360° . Então podemos usar as propriedades vistas anteriormente para esse ponto. Antes de continuar a resolução desse problema, vamos provar um lema que precisaremos.

Lema 1. Dado um triângulo DEF , sejam P e Q pontos sobre as retas $\overleftrightarrow{FD}$ e $\overleftrightarrow{FE}$, respectivamente, tais que $\overline{PF} \geq \lambda \overline{DF}$ e $\overline{QF} \geq \lambda \overline{EF}$, em que $\lambda > 0$. Se $\angle PFQ \geq 90^\circ$, então $\overline{PQ} \geq \lambda \overline{DE}$.

Demonstração do Lema. Seja $\angle PFQ = \theta$. Como $\theta \geq 90^\circ$, temos $\cos \theta \leq 0$, o que implica $-\cos \theta \geq 0$. Pela Lei dos Cossenos aplicado no triângulo PFQ , obtemos

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{PF}^2 + \overline{QF}^2 - 2\overline{PF} \cdot \overline{QF} \cos \theta \\ &= \overline{PF}^2 + \overline{QF}^2 + 2\overline{PF} \cdot \overline{QF}(-\cos \theta).\end{aligned}$$

Desde que $\overline{PF} \geq \lambda \overline{DF}$ e $\overline{QF} \geq \lambda \overline{EF}$, e sabendo que todos os termos são positivos (incluindo $-\cos \theta$), podemos substituir pelas desigualdades

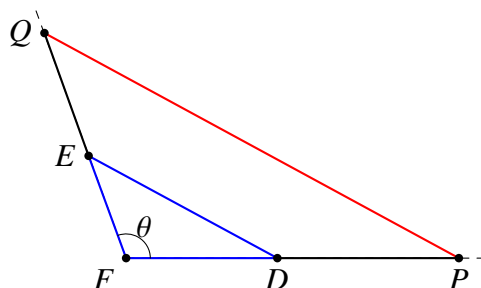
$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &\geq (\lambda \overline{DF})^2 + (\lambda \overline{EF})^2 + 2(\lambda \overline{DF})(\lambda \overline{EF})(-\cos \theta) \\ &= \lambda^2(\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2 - 2\overline{DF} \cdot \overline{EF} \cos \theta).\end{aligned}$$

O termo entre parênteses é exatamente $\overline{DE}^2$ (pela Lei dos Cossenos no triângulo DEF). Logo

$$\overline{PQ}^2 \geq \lambda^2 \overline{DE}^2 \implies \overline{PQ} \geq \lambda \overline{DE}.$$

Para entender visualmente o lema demonstrado, veja a Figura 9.

Figura 9: Ilustração do Lema Auxiliar



Fonte: Os autores

□

Voltando para a prova, sejam P e Q os pontos em que as retas $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ interceptam os circuncírculos dos triângulos CFA e AFB , respectivamente, como feito na Figura 10.

Observe que o quadrilátero $AFCP$ é cíclico, pois P está no circuncírculo de CFA . Sabemos que o circuncírculo do $\triangle CFA$ também passa pelo vértice do triângulo equilátero construído externamente sobre $\overline{AC}$.

Além disso, a reta $\overleftrightarrow{BF}$ passa por esse mesmo vértice (propriedade do Ponto de Fermat).

Como P é a interseção da reta $\overleftrightarrow{BF}$ com esse círculo (além de F), conclui-se que P é o próprio vértice do triângulo equilátero externo. Portanto, $\triangle CPA$ é equilátero. Analogamente, o ponto Q (interseção de $\overleftrightarrow{CF}$ com o circuncírculo de AFB) é o vértice do triângulo equilátero AQB construído externamente sobre $\overline{AB}$.

Isso implica $\overline{PD} \geq 3\overline{DF}$. Somando $\overline{DF}$ em ambos os lados dessa última desigualdade, obtemos

$$\overline{PF} = \overline{PD} + \overline{DF} \geq 3\overline{DF} + \overline{DF} = 4\overline{DF}.$$

Analogamente, demonstra-se que $\overline{QF} \geq 4\overline{EF}$.

Como todas as condições estão satisfeitas, o Lema 1 garante que $\overline{PQ} \geq 4\overline{DE}$.

Finalmente, pela desigualdade triangular aplicada ao triângulo APQ

$$\overline{AP} + \overline{AQ} \geq \overline{PQ}.$$

Como $\triangle CPA$ e $\triangle AQB$ são equiláteros, temos $\overline{AP} = \overline{AC}$ e $\overline{AQ} = \overline{AB}$. Portanto

$$\overline{AB} + \overline{AC} \geq \overline{PQ} \geq 4\overline{DE}.$$

□

Figura 11: Solução Problema 2 no YouTube



Fonte: Os autores

A resolução deste problema da IMO Shortlist também conta com uma visualização animada disponível no YouTube, o acesso pode ser realizado escaneando ou clicando no QR Code da Figura 11.

3.3 Teorema de Napoleão

Napoleão Bonaparte (1769–1821) nasceu em Ajaccio, na Córsega, e morreu na ilha de Santa Helena, vítima de um câncer no estômago. Desde a juventude, destacou-se em matemática, em que recebeu permissão para assistir às aulas de matemática antes da idade prescrita de doze anos e rapidamente dominou geometria, álgebra e trigonometria. Mais tarde, na *École Royale Militaire*, teve aulas com o Marquês de Laplace, o que reforçou sua formação científica e seu apreço pelas ciências exatas. Em 1797, já reconhecido como figura pública de destaque, foi eleito membro do *Institut de France*, a principal sociedade intelectual francesa, com apoio de cientistas como Laplace e Berthollet, a partir de então, passou a assistir regularmente a palestras científicas e a assinar-se, com orgulho, como “Membro do Instituto” antes mesmo de seu título militar [19]. No campo matemático, seu nome está ligado a um belo resultado da geometria, conhecido como *Teorema de Napoleão*.

O Teorema de Napoleão é um resultado clássico da geometria que afirma que os centros dos triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados de um triângulo qualquer formam, por sua vez, um triângulo equilátero. Embora leve o nome do imperador francês, a autoria do teorema é motivo de debate histórico.

Segundo Grünbaum [20], não existem evidências documentais de que Napoleão tenha proposto ou provado o teorema. A primeira aparição conhecida do resultado na literatura ocorreu em 1825, no periódico *The Ladies' Diary*, em uma questão proposta por W. Rutherford [21], sem qualquer menção ao imperador francês. A associação com Napoleão surgiu quase um século depois: a primeira referência impressa conhecida ligando o nome do monarca ao teorema foi encontrada na 17ª edição de um livro didático italiano de Aureliano Faifofer, publicado em 1911 [22].

Embora faltem provas diretas de autoria, é amplamente reconhecido que Napoleão tinha grande interesse pela matemática e convivia com importantes geômetras de sua época. Autores como Andrew Boyd argumentam que ele possuía conhecimento geométrico suficiente para provar o teorema por conta própria [23]. Ainda que a origem exata permaneça incerta, o nome de Napoleão consolidou-se na tradição geométrica, tornando-se inseparável deste elegante teorema. A seguir, apresentaremos um lema auxiliar e, em seguida, enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Napoleão.

Lema 2. *Seja XYZ um triângulo equilátero de lado s , e seja O seu centro. Então*

$$\overline{OX} = \overline{OY} = \overline{OZ} = \frac{s}{\sqrt{3}}.$$

Demonstração. Tome M como ponto médio de $\overline{YZ}$. Como o triângulo é equilátero, a mediana $\overline{XM}$ também é altura e bissetriz. Assim, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo XYM ,

$$\overline{XM}^2 = s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{3s^2}{4},$$

logo

$$\overline{XM} = \frac{s\sqrt{3}}{2}.$$

Como o centro de um triângulo equilátero pertence à mediana e a divide na razão 2 : 1, a partir do vértice, resultado que pode ser consultado em Coxeter e Greitzer [1], temos

$$\overline{OX} = \frac{2}{3} \overline{XM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2} = \frac{s}{\sqrt{3}}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio às medianas que partem de Y e de Z , obtemos também

$$\overline{OY} = \overline{OZ} = \frac{s}{\sqrt{3}}.$$

□

Teorema 4 (Teorema de Napoleão). *Seja ABC um triângulo qualquer. Construam-se externamente sobre os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ os triângulos equiláteros $\triangle BCA'$, $\triangle CAB'$ e $\triangle ABC'$, respectivamente. Sejam P , Q e R os centros de $\triangle BCA'$, $\triangle CAB'$ e $\triangle ABC'$, respectivamente. Então o triângulo PQR é equilátero.*

Demonstração. Sejam

$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{CA}, \quad c = \overline{AB}.$$

Além disso, sejam α , β e γ os ângulos internos do $\triangle ABC$ nos vértices A , B e C , respectivamente. A área do $\triangle ABC$ será denotada por $[ABC]$.

A Figura 12 destaca os triângulos equiláteros construídos externamente e o triângulo AQR , que será utilizado para calcular o comprimento de $\overline{QR}$. Pelo Lema 2, aplicado ao triângulo equilátero $\triangle CAB'$, como seu lado mede $\overline{CA} = b$, temos

$$\overline{AQ} = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Além disso, no triângulo equilátero $\triangle CAB'$, a mediana que parte de A coincide com a bissetriz do ângulo $\angle C\hat{A}B'$. Como Q é o centro desse triângulo, ele pertence a essa mediana. Logo, a semirreta $\overrightarrow{AQ}$ divide o ângulo de 60° em dois ângulos iguais, e portanto

$$\angle C\hat{A}Q = 30^\circ.$$

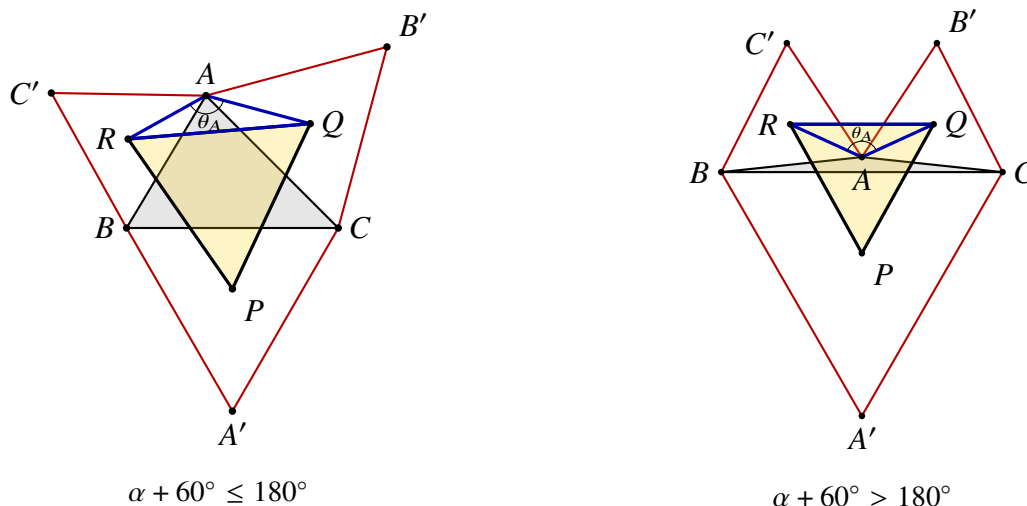
Do mesmo modo, aplicando o Lema 2 ao triângulo equilátero $\triangle ABC'$, cujo lado mede $\overline{AB} = c$, temos

$$\overline{AR} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Analogamente, no triângulo equilátero $\triangle ABC'$, a mediana que parte de A coincide com a bissetriz do ângulo $\angle B\hat{A}C'$. Como R é o centro desse triângulo, a semirreta $\overrightarrow{AR}$ divide esse ângulo de 60° em dois ângulos iguais. Assim,

$$\angle R\hat{A}B = 30^\circ.$$

Figura 12: Relações de comprimento e do ângulo θ_A no Triângulo de Napoleão



Fonte: Os autores

Seja θ_A a medida do menor ângulo determinado pelas semirretas $\overrightarrow{AQ}$ e $\overrightarrow{AR}$. Como as construções são externas, o percurso angular de $\overrightarrow{AR}$ até $\overrightarrow{AQ}$, que passa por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é dada pela soma

$$\angle R\hat{A}B + \angle B\hat{A}C + \angle C\hat{A}Q = 30^\circ + \alpha + 30^\circ = \alpha + 60^\circ.$$

Portanto,

$$\theta_A = \begin{cases} \alpha + 60^\circ, & \text{se } \alpha + 60^\circ \leq 180^\circ, \\ 360^\circ - (\alpha + 60^\circ), & \text{se } \alpha + 60^\circ > 180^\circ. \end{cases}$$

O segundo caso corresponde à situação em que o percurso indicado é o ângulo maior entre as semirretas, como mostrado na Figura 12. Como $\cos(360^\circ - x) = \cos x$, em ambos os casos temos

$$\cos \theta_A = \cos(\alpha + 60^\circ).$$

Quando $0^\circ < \theta_A < 180^\circ$, aplicamos a Lei dos Cossenos ao triângulo AQR . Quando $\theta_A = 180^\circ$, os pontos Q , A e R são colineares, com A entre Q e R ; nesse caso, a mesma igualdade abaixo resulta de $\overline{QR} = \overline{AQ} + \overline{AR}$. Portanto,

$$\overline{QR}^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} \cos(\alpha + 60^\circ).$$

Logo,

$$\overline{QR}^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ)}{3}.$$

Pela identidade trigonométrica do cosseno da soma,

$$\cos(\alpha + 60^\circ) = \cos \alpha \cos 60^\circ - \sin \alpha \sin 60^\circ = \frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\sqrt{3} \sin \alpha}{2}.$$

Substituindo essa identidade na expressão de $\overline{QR}^2$, obtemos

$$\overline{QR}^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \left(\frac{\cos \alpha}{2} - \frac{\sqrt{3} \sin \alpha}{2}\right)}{3}.$$

Daí,

$$\overline{QR}^2 = \frac{b^2 + c^2 - bc \cos \alpha + \sqrt{3}bc \sin \alpha}{3}.$$

Por outro lado, pela Lei dos Cossenos em $\triangle ABC$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Assim,

$$bc \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Logo,

$$b^2 + c^2 - bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Além disso, como a área de $\triangle ABC$ pode ser expressa por

$$[ABC] = \frac{bc \sin \alpha}{2},$$

temos

$$bc \sin \alpha = 2[ABC].$$

Portanto,

$$\overline{QR}^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3} [ABC] \right). \quad (11)$$

Agora calculamos os outros dois lados do triângulo PQR da mesma forma. No vértice B , os centros envolvidos são R e P : o ponto R é centro do triângulo equilátero construído sobre $\overline{AB}$, e o ponto P é centro do triângulo equilátero construído sobre $\overline{BC}$. Assim,

$$\overline{BR} = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad \overline{BP} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

e, pelo mesmo raciocínio angular usado no vértice A , o cosseno do ângulo entre $\overrightarrow{BR}$ e $\overrightarrow{BP}$ é igual a $\cos(\beta + 60^\circ)$. Portanto, pela Lei dos Cossenos,

$$\overline{RP}^2 = \frac{c^2 + a^2 - 2ca \cos(\beta + 60^\circ)}{3}.$$

Como

$$\cos(\beta + 60^\circ) = \frac{\cos \beta}{2} - \frac{\sqrt{3} \sin \beta}{2},$$

temos

$$\overline{RP}^2 = \frac{c^2 + a^2 - ca \cos \beta + \sqrt{3} ca \sin \beta}{3}.$$

Usando $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$ e $[ABC] = \frac{ca \sin \beta}{2}$, obtemos

$$\overline{RP}^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3} [ABC] \right). \quad (12)$$

No vértice C , os centros envolvidos são P e Q . Temos

$$\overline{CP} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \overline{CQ} = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

e, novamente pelo mesmo raciocínio, o cosseno do ângulo entre $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{CQ}$ é igual a $\cos(\gamma + 60^\circ)$. Logo, pela Lei dos Cossenos,

$$\overline{PQ}^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma + 60^\circ)}{3}.$$

Substituindo

$$\cos(\gamma + 60^\circ) = \frac{\cos \gamma}{2} - \frac{\sqrt{3} \sin \gamma}{2},$$

e usando $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ e $[ABC] = \frac{ab \sin \gamma}{2}$, segue que

$$\overline{PQ}^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3} [ABC] \right). \quad (13)$$

Dessa forma, de (11), (12) e (13), obtemos

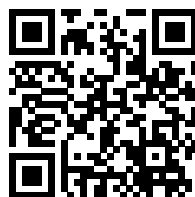
$$\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 = \overline{RP}^2.$$

Assim, $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$. Consequentemente, o triângulo PQR é equilátero. □

Neste trabalho, apresentamos o Teorema de Napoleão apenas no caso em que os triângulos equiláteros são construídos externamente aos lados do triângulo ABC . Entretanto, o resultado também pode ser demonstrado quando essas construções são realizadas internamente.

Para visualizar que, independentemente do tamanho dos triângulos equiláteros construídos sobre as arestas do triângulo ABC , o triângulo formado é equilátero, foi construída mais uma animação com o Manim que pode ser consultada na Figura 13.

Figura 13: Animação do Teorema de Napoleão no YouTube



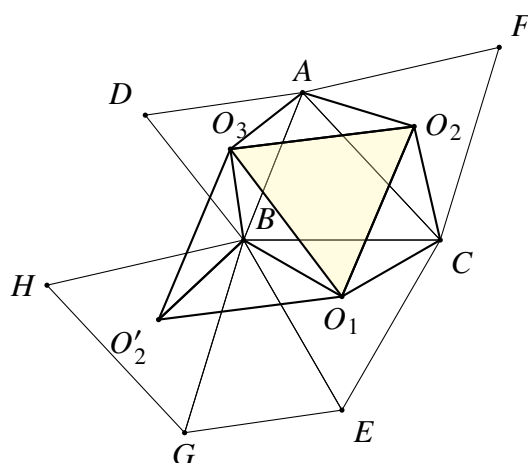
Fonte: Os autores

Essa animação começa com um triângulo ABC qualquer e, em seguida, os três triângulos equiláteros são construídos sobre os lados, e seus centros P , Q e R são marcados. Depois disso, os segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ e $\overline{RP}$ são traçados, formando o Triângulo de Napoleão. Visualmente, fica evidente que esse triângulo é equilátero, mesmo que o triângulo original seja completamente assimétrico. Uma variação interessante da animação exibe os vértices do triângulo original se movendo continuamente, permitindo observar que, independentemente da deformação aplicada, o triângulo central permanece sempre equilátero.

Vejamos agora um problema olímpico da OPM, nível γ .

Problema 3 (OPM 2016). *Considere um triângulo ABC e triângulos equiláteros ABD , BCE e CAF construídos externamente sobre seus lados. Sejam O_1 , O_2 e O_3 os centros dos triângulos BCE , CAF e ABD , respectivamente. Construimos sobre o lado $\overline{BE}$ o triângulo GEB congruente ao triângulo ABC e sobre o lado $\overline{BG}$ mais um triângulo equilátero BGH de centro O'_2 .*

Figura 14: Ilustração OPM 2016 - Problema 3



Fonte: Os autores, com base em OPM 2016

- a) Prove as seguintes congruências de triângulos: $\triangle O_2AO_3 \equiv \triangle O'_2BO_3$ e $\triangle O_2CO_1 \equiv \triangle O'_2BO_1$.
- b) Prove que $\angle O_2\hat{O}_1O'_2 = \angle O_2\hat{O}_3O'_2 = 120^\circ$. Você não pode usar que o triângulo $O_1O_2O_3$ é equilátero. Nós não demonstramos isso ainda!
- c) Conclua a demonstração do Teorema de Napoleão provando que $\triangle O_1O_2O_3$ é equilátero.

Figura 15: Solução Problema 2 no YouTube



Fonte: Os autores

Uma animação didática da solução do problema da OPM está disponível no YouTube. Para assisti-la, basta escanear ou clicar no QR Code da Figura 15. A seguir, apresentamos a solução escrita.

Solução. Vamos adotar a notação dos ângulos internos do triângulo ABC como $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Observe que, pela construção, O_1 é o centro de BCE (construído sobre $\overline{BC}$), O_2 é o centro de CAF (construído sobre $\overline{AC}$) e O_3 é o centro de ABD (construído sobre $\overline{AB}$).

Para o item a), ou seja, demonstrar a congruência $\triangle O_2AO_3 \equiv \triangle O'_2BO_3$, observamos inicialmente que O_3 é o centro do triângulo equilátero ABD , o que implica que os segmentos $\overline{O_3A}$ e $\overline{O_3B}$ são congruentes. Além disso, conforme informa o enunciado, o triângulo GEB é congruente ao triângulo ABC , de modo que o segmento $\overline{BG}$ é congruente ao segmento $\overline{AC}$. Como os triângulos equiláteros BGH e CAF são construídos sobre segmentos de mesma medida ($\overline{BG}$ e $\overline{AC}$, respectivamente), eles são congruentes. Sendo O_2 e O'_2 os respectivos centros desses triângulos, temos que $\overline{O_2A} = \overline{O'_2B}$.

Analisando os ângulos, temos que o segmento $\overline{O_2A}$ bisseta o ângulo interno $\angle C\hat{A}F$, e $\overline{O_3A}$ bisseta o ângulo interno $\angle B\hat{A}D$. Assim, $\angle O_2\hat{A}O_3 = \angle O_2\hat{A}C + \angle C\hat{A}B + \angle B\hat{A}O_3 = 30^\circ + \hat{A} + 30^\circ = \hat{A} + 60^\circ$.

Para o ângulo $\angle O'_2\hat{B}O_3$, analisamos a soma dos ângulos em torno do vértice B , que deve ser 360° . Considerando a decomposição em sequência ao redor de B , temos os seguintes ângulos: $\angle A\hat{B}C = \hat{B}$, $\angle C\hat{B}E = 60^\circ$, $\angle E\hat{B}G = \hat{C}$ (pela congruência $\triangle GEB \equiv \triangle ABC$), $\angle G\hat{B}H = 60^\circ$ e $\angle D\hat{B}A = 60^\circ$.

O ângulo restante é

$$\angle H\hat{B}D = 360^\circ - (\hat{B} + 60^\circ + \hat{C} + 60^\circ + 60^\circ) = 360^\circ - (180^\circ + \hat{B} + \hat{C}).$$

Como $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$, segue que

$$\angle H\hat{B}D = 360^\circ - (360^\circ - \hat{A}) = \hat{A}.$$

O ângulo $\angle O'_2\hat{B}O_3$ é a soma dos ângulos adjacentes $\angle O'_2\hat{B}H$, $\angle H\hat{B}D$ e $\angle D\hat{B}O_3$. Como $\overline{BO'_2}$ e $\overline{BO_3}$ são bissetrizes dos ângulos internos de 60° dos triângulos equiláteros BGH e ABD , respectivamente, temos $\angle O'_2\hat{B}H = 30^\circ$ e $\angle D\hat{B}O_3 = 30^\circ$.

Logo,

$$\angle O'_2\hat{B}O_3 = 30^\circ + \hat{A} + 30^\circ = \hat{A} + 60^\circ.$$

Portanto, pelo caso Lado-Ângulo-Lado (LAL), os triângulos são congruentes. Para a segunda congruência, $\triangle O_2CO_1 \equiv \triangle O'_2BO_1$, o raciocínio é similar.

Para o item b), utilizamos as congruências demonstradas anteriormente. Da congruência $\triangle O_2AO_3 \equiv \triangle O'_2BO_3$, temos a igualdade dos ângulos correspondentes $\angle A\hat{O}_3O_2 = \angle B\hat{O}_3O'_2$. Como O_3 é o centro do triângulo equilátero ABD , os segmentos $\overline{O_3A}$ e $\overline{O_3B}$ são bissetrizes dos ângulos internos de 60° . Logo, no triângulo $\triangle AO_3B$, os ângulos da base medem 30° , implicando que o ângulo do vértice é $\angle A\hat{O}_3B = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$. Observando a Figura 14, vemos que o segmento $\overline{O_3O_2}$ é interior ao ângulo $\angle A\hat{O}_3B$, permitindo escrever $\angle A\hat{O}_3B = \angle A\hat{O}_3O_2 + \angle O_2\hat{O}_3B$. O ângulo que desejamos calcular é $\angle O_2\hat{O}_3O'_2$. Pela posição dos pontos, este ângulo é a soma $\angle O_2\hat{O}_3B + \angle B\hat{O}_3O'_2$. Substituindo $\angle B\hat{O}_3O'_2$ por $\angle A\hat{O}_3O_2$, obtemos:

$$\angle O_2\hat{O}_3O'_2 = \angle O_2\hat{O}_3B + \angle A\hat{O}_3O_2 = \angle A\hat{O}_3B = 120^\circ.$$

De maneira análoga para o vértice O_1 , a congruência $\triangle O_2CO_1 \equiv \triangle O'_2BO_1$ implica $\angle C\hat{O}_1O_2 = \angle B\hat{O}_1O'_2$. O ângulo central do triângulo BCE é $\angle C\hat{O}_1B = 120^\circ$. Decompondo este ângulo, temos $\angle C\hat{O}_1B = \angle C\hat{O}_1O_2 + \angle O_2\hat{O}_1B$. O ângulo $\angle O_2\hat{O}_1O'_2$ é formado pela soma adjacente $\angle O_2\hat{O}_1B + \angle B\hat{O}_1O'_2$, daí substituindo $\angle B\hat{O}_1O'_2$ por $\angle C\hat{O}_1O_2$, concluímos:

$$\angle O_2\hat{O}_1O'_2 = \angle O_2\hat{O}_1B + \angle C\hat{O}_1O_2 = \angle C\hat{O}_1B = 120^\circ.$$

Para o item c), a demonstração de que o triângulo $\triangle O_1O_2O_3$ é equilátero já foi realizada neste artigo, na demonstração do Teorema de Napoleão. Alternativamente, pode-se utilizar os resultados dos itens a) e b) para estruturar a prova por um caminho diferente. Considere o quadrilátero $O_1O'_2O_3O_2$, agora utilize o fato de que os triângulos $\triangle O_2O_3O'_2$ e $\triangle O_2O_1O'_2$ são isósceles (consequência do item a) com ângulos de vértice de 120° (item b). Calcule os ângulos da base desses triângulos para determinar a medida do ângulo $\angle O_3\hat{O}_2O_1$, e depois aplique o mesmo raciocínio para os outros vértices O_1 e O_3 para concluir que todos os ângulos internos medem 60° . $\square$

4 Conclusão

Neste artigo, exploramos três teoremas clássicos da geometria euclidiana, o Teorema de Viviani, o Ponto de Fermat e o Teorema de Napoleão, sob uma perspectiva que combina matemática com visualização computacional, as demonstrações apresentadas ilustram a eficiência das técnicas geométricas tradicionais, enquanto as animações desenvolvidas com a biblioteca Manim oferecem uma nova dimensão de compreensão.

A utilização de ferramentas de visualização programática, como o Manim, representa uma evolução significativa no ensino e na comunicação da matemática, que diferentemente de figuras estáticas, as animações permitem observar propriedades invariantes em ação, construções geométricas passo a passo e o surgimento de padrões que seriam difíceis de perceber de outra forma. Dessa forma, essa abordagem pode acelerar o desenvolvimento da intuição geométrica, complementando o estudo teórico tradicional.

A análise dos três teoremas mostra que, embora surjam em contextos distintos, todos têm em comum o uso do triângulo equilátero. A versão apresentada do Teorema de Viviani é formulada diretamente nesse tipo de triângulo, relacionando um ponto interno às distâncias até os lados. Construindo triângulos equiláteros sobre os vértices de um triângulo qualquer, obtém-se uma construção que permite identificar o ponto cuja posição torna mínima a soma das distâncias até os vértices,

conhecido como Ponto de Fermat. De modo semelhante, o Teorema de Napoleão também pode se basear na construção de equiláteros externos, cujos centros formam outro triângulo equilátero. Assim, percebe-se que esses resultados, mesmo partindo de situações diferentes, revelam propriedades interessantes obtidas por meio de construções simples.

Além disso, a discussão dos problemas olímpicos (PUMaC, IMO Shortlist e OPM) demonstrou a aplicabilidade prática e a profundidade desses teoremas. A resolução desses desafios exige não apenas o conhecimento dos enunciados, mas também a capacidade de reconhecer as estruturas geométricas e aplicar as propriedades de forma criativa. Isso reforça a importância de estudar a geometria clássica não apenas como um conjunto de fatos isolados, mas como uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas.

Concluimos que as animações produzidas no Manim podem contribuir significativamente para o entendimento desses teoremas e problemas apresentados, sobretudo por sua natureza visualmente estética, dinâmica e altamente personalizável, pois como se trata de uma ferramenta programática, o usuário tem liberdade para construir cada cena da maneira que julgar mais adequada, ajustando cores, movimentos, tempos, destaques e estruturas geométricas conforme suas necessidades didáticas ou investigativas. Essa característica permite representar ideias abstratas de forma clara, favorecendo tanto a intuição quanto a compreensão formal dos resultados apresentados. Esperamos que este trabalho incentive estudantes, professores e entusiastas da matemática a explorar as possibilidades oferecidas pelas modernas ferramentas de visualização, integrando tecnologia e rigor teórico sem perder de vista a elegância que sempre acompanhou a geometria clássica.

Agradecimento: Os autores agradecem aos revisores por suas valiosas observações e sugestões, as quais tornaram o artigo mais claro e didático.

Referências

- [1] COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry Revisited**. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1967.
- [2] ALSINA, C.; NELSEN, R. B. **Charming Proofs: A journey into elegant mathematics**. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 2010.
- [3] ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 52, n. 3, p. 215–241, 2003.
- [4] SANDERSON, G. **3Blue1Brown**. 2025. Disponível em: <https://www.3blue1brown.com/>. Acesso em: 28 nov. 2025.
- [5] PRINCETON UNIVERSITY MATHEMATICS COMPETITION. **Archives**: provas e materiais. 2013. Disponível em: <https://pumac.princeton.edu/archives>. Acesso em: 21 nov. 2025.
- [6] INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. **International Mathematical Olympiad**. 2025. Disponível em: <https://www.imo-official.org/>. Acesso em: 23 nov. 2025.
- [7] OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA. **Olimpíada Paulista de Matemática (OPM)**. 2025. Disponível em: <https://www.opm.mat.br/>. Acesso em: 21 nov. 2025.

- [8] ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (ed.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1991.
- [9] GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS*, 2., 2002, Creta. **Proceedings [...]**. Creta: University of Crete, 2002. p. 1–17.
- [10] THE MANIM COMMUNITY DEVELOPERS. **Manim**: Mathematical animation engine. versão 0.19.0. 2025. Disponível em: <https://docs.manim.community/>. Acesso em: 29 nov. 2025.
- [11] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 27 nov. 2025.
- [12] O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Vincenzo viviani. *In: UNIVERSITY OF ST ANDREWS. MacTutor: history of Mathematics archive*. Scotland, 2009. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viviani/>. Acesso em: 03 dez. 2025.
- [13] ZHOU, L. Viviani polytopes and fermat points. **The College Mathematics Journal**, Philadelphia, v. 43, n. 4, p. 309–312, 2012.
- [14] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2012. Tradução de Helena Castro.
- [15] O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Pierre de fermat. *In: UNIVERSITY OF ST ANDREWS. MacTutor: history of Mathematics archive*. Scotland, 2009. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat/>. Acesso em: 03 dez. 2025.
- [16] POSAMENTIER, A. S.; HUMENBERGER, H. **A Journey Through the Wonders of Plane Geometry**. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2025.
- [17] SIMONS, S. Some features of the general fermat point. **The Mathematical Gazette**, Leicester, v. 87, n. 508, p. 60–70, 2003.
- [18] INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. **Short-listed problems and solutions**. 2002. *In: INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD*, 43., 2002, United Kingdom. Disponível em: <https://www.imomath.com/imocomp/sl02.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2025.
- [19] ROBERTS, A. **Napoleon: A life**. New York: Penguin Publishing Group, 2014.
- [20] GRÜNBAUM, B. Is napoleon’s theorem really napoleon’s theorem? **American Mathematical Monthly**, Philadelphia, v. 119, n. 6, p. 495–501, 2012.
- [21] RUTHERFORD, W. Question 122. **The Ladies’ Diary**, London, p. 47, 1825.
- [22] FAIFOER, A. **Elementi di Geometria, ad uso degli Instituti Technici (1° Biennio) e dei licei**. 17. ed. Veneza: Sorteni & Vidotti, 1911.
- [23] BOYD, A. Nº 2550: Napoleon’s Theorem. **The Engines of Our Ingenuity**, Houston, n. 2550. Disponível em: <https://engines.egr.uh.edu/episode/2550>. Acesso em: 04 dez. 2025.