

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 27, 2026
Artigo de Pesquisa

Luan Santos Lemos

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Departamento de Ciências Exatas e da Terra (DCET), Vitória da Conquista, luan.santoslemos144@gmail.com

Carlos Takiya

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Departamento de Ciências Exatas e da Terra (DCET), Vitória da Conquista

Um estudo matemático sobre o movimento do pêndulo simples

A mathematical study on the motion of the simple pendulum

Resumo

Temos por intenção apresentar neste artigo, uma breve descrição histórica sobre os pêndulos, sendo este instrumento muito mais antigo do que geralmente se supõe. A seguir vamos apresentar uma dedução da lei do isocronismo do pêndulo simples, que é uma das leis fundamentais que regem o movimento deste tipo de dispositivo. Para além disso, faremos um estudo a respeito da equação diferencial do pêndulo simples que para pequenas oscilações, podemos tomar a aproximação $\sin \theta \simeq \theta$, o que a transforma na típica equação diferencial do oscilador harmônico simples, cuja solução geral pode ser facilmente determinada. Vamos estudar, o quão boa é tal aproximação, faremos implementações por aproximações para o período do pêndulo por séries de potências, objetivando melhorar a precisão do período. Além disso, estudaremos a dinâmica do pêndulo simples e será feita uma busca da solução exata para resolver a equação diferencial não-linear do pêndulo, o que leva a não mais nos restringirmos à soluções aproximadas.

Palavras-chave: pêndulo simples; equações diferenciais; aplicações das equações diferenciais; sistemas físicos; oscilador harmônico simples.

Abstract

In this article, we intend to present a brief historical description of pendulums, an instrument much older than is generally assumed. Next, we will present a derivation of the law of isochronism for the simple pendulum, which is one of the fundamental laws governing the motion of this type of device. Furthermore, we will study the differential equation of the simple pendulum where, for small oscillations, we can apply the approximation $\sin \theta \simeq \theta$, transforming it into the typical differential equation of the simple harmonic oscillator, whose general solution can be easily determined. We will examine the validity of this approximation and implement power series approximations for the pendulum's period, aiming to improve its precision. Additionally, we will study the dynamics of the simple pendulum and seek the exact solution to the non-linear differential equation, allowing us to no longer be restricted to approximate solutions.

Keywords: simple pendulum; differential equations; applications of differential equations; physical systems; simple harmonic oscillator.



1 Introdução Histórica

Os pêndulos simples são instrumentos usados há bastante tempo. Desde a Antiguidade, vemos algumas explicações filosóficas e religiosas a respeito desse instrumento; porém, não se sabe com precisão como e quando ele passou a ser considerado para fins científicos [1, 2]. Hoje, o pêndulo simples é um exemplo clássico de oscilador harmônico simples em Física. Mas o seu uso na ciência, de forma ampla, foi relativamente tardio, não tendo começado antes do Renascimento europeu, no início da ciência moderna, figuras como Galileu Galilei (1564–1642) e, posteriormente, Christiaan Huygens (1629–1695) e Isaac Newton (1642–1727), entre outros estudiosos, fizeram uso dos pêndulos em suas respectivas obras com objetivos científicos.

Não há indícios que digam quem foi o primeiro estudioso a introduzir o uso dos pêndulos como instrumentos teóricos e práticos na ciência da mecânica. Historicamente, os pêndulos são usados desde a antiguidade, em diversas culturas antigas. Os pêndulos tinham utilidade como parte de rituais mitológicos e religiosos e como forma de adivinhar o futuro, ou mesmo para rituais de hipnose. Há registros de amuletos com pequenas pedras presas na extremidade de cordas, sendo os primeiros pêndulos, na maioria dos casos, um dispositivo simples, frequentemente um peso suspenso por uma corda ou corrente, e esses instrumentos tinham variadas funções em certos rituais religiosos. De acordo com [1], há evidências de seu uso em várias civilizações.

Em várias culturas antigas, acreditava-se que o pêndulo servia como um canal entre os mundos físico e espiritual. Acreditava-se que seu balanço suave e rítmico era influenciado por forças invisíveis, fornecendo respostas do divino ou do sobrenatural. Essa prática, conhecida como radiestesia pendular, envolvia interpretar a direção, a velocidade e o padrão do balanço do pêndulo para obter orientação, descobrir verdades ocultas ou tomar decisões. Os egípcios, por exemplo, eram conhecidos por usar pêndulos em seus ritos e cerimônias religiosas [1]. Eles acreditavam que o movimento do pêndulo poderia revelar mensagens divinas ou auxiliar na comunicação com os deuses. Da mesma forma, na China antiga [3], pêndulos eram usados para geomancia, um processo de adivinhação que decodifica marcas no solo ou os padrões criados por punhados de pedras ou areia arremessados. O pêndulo era usado para determinar o *fluxo de chi* (energia vital) e para tomar decisões sobre locais de sepultamento, localização de templos e outros arranjos espaciais importantes, de acordo com os princípios do *Feng Shui* [1].

Na Idade Média, os pêndulos ainda continuaram a ser usados como dispositivos religiosos, porém, já não era mais uma prática tão comum, pois, na antiguidade, os pêndulos eram usados principalmente pelos povos de culturas pagãs, como os egípcios, mesopotâmios, persas e chineses. Entretanto, tais rituais eram muito mal vistos pela cultura religiosa cristã. O primeiro uso científico dos pêndulos foi registrado na China Antiga [3]. Há evidências documentais de um dispositivo, um sismógrafo primitivo, que havia sido construído pelo cientista chinês Zhang Heng (78–139 d.C.), que usava uma espécie de pêndulo simples – um peso suspenso por uma corda; e, caso ocorresse um terremoto, este acionava um mecanismo que indicava a direção do tremor [3].

Mas o estudo científico efetivo do dispositivo não ocorreu na Antiguidade, nem na Idade Média, tal estudo só veio a ocorrer definitivamente na era moderna. Segundo [2, 4], Galileu iniciou seus próprios estudos matemáticos ao investigar o isocronismo das oscilações pendulares, em que o período de oscilação de um pêndulo é independente da sua amplitude (para pequenas oscilações apenas). A lei do isocronismo dos pêndulos é muitas vezes creditada à Galileu [2].

As potencialidades dos pêndulos como instrumentos científicos foram reconhecidas primeiramente por Galileu Galilei (1564–1642), que, com base em seus experimentos, propiciou o que hoje é reconhecida como uma das primeiras aplicações dos pêndulos [2, 5]. Relatos históricos descrevem que Galileu, quando ainda era estudante de medicina em Pisa, teria observado o movimento de um

candelabro na Catedral de Pisa e, fazendo estimativas com o seu próprio pulso, chegou a pensar que aquele tipo de movimento pendular tinha alguma regularidade, um padrão [1]. Porém, posteriormente, com base em experimentos mais aprimorados, ele chegou à descoberta do isocronismo dos pêndulos, isto é, ele descobriu que o período das oscilações permanecia o mesmo, muito embora sua amplitude fosse diminuindo [6], ou, dito de outra forma, o período de oscilação de um pêndulo independe da sua amplitude [7, 8], isso para pequenos ângulos de oscilação, quando $\sin \theta \simeq \theta$. Sabemos, também, que o período de oscilação do pêndulo é independente da massa da partícula suspensa no fio [8].

O instrumento tinha como principal aplicação a cronometragem do tempo e, essa aplicação foi logo notada pelos estudiosos, que logo perceberam que o movimento oscilatório e regular dos pêndulos é uma propriedade muito interessante para a medição do tempo [2, 4]. Entre os séculos XVI e XVII, ainda não haviam meios precisos para a medição do tempo,

A medição precisa do tempo era extremamente importante para a navegação. Nessa época, a medição de latitudes era feita com boa precisão, diferentemente da medição de longitude. Tal necessidade despertou o interesse de cientistas, como Galileu Galilei (1564–1642), Giovanni Dominique Cassini (1625–1712), Christiaan Huygens (1629–1695), Isaac Newton (1642–1727), entre outros. Governos de países como a Espanha e a Holanda ofereciam grandes prêmios para aqueles que resolvessem satisfatoriamente o problema da medição de longitudes [4].

Apesar de Galileu ser amplamente reconhecido por ter estudado os pêndulos e por ter ele sido o pioneiro a propor um tipo de relógio de pêndulo, não foi ele o primeiro a propor qualquer instrumento científico com o uso de pêndulos. De acordo com relatos históricos, por volta de 1602, o médico italiano Santorio Sanctorius (1561–1636) foi o primeiro a construir um *pulsilogium*, um pêndulo de comprimento padrão destinado a medir as pulsações de pacientes em hospitais, ou seja, um tipo de pêndulo usado para medir batimentos cardíacos, sendo este considerado o primeiro dispositivo médico da história [9]. Santorio nasceu em 29 de março de 1561 em Capodístria, na atual Eslovênia. Sua mãe, Elisabetta Cordonì (ou Cordonì), era uma nobre de uma família da Ístria, e seu pai, Antonio Sanctorius, era um nobre de Friul que trabalhava para a República de Veneza como chefe de artilharia da cidade. Isso, posteriormente, levaria a família a se mudar para Veneza.

Santorio foi educado em sua cidade natal e continuou os estudos em Veneza antes de ingressar na Universidade de Pádua em 1578, onde obteve o diploma de medicina em 1585. Atuou como médico pessoal de um nobre croata de 1587 a 1594 e estabeleceu uma clínica médica em Veneza, onde conheceu Galileu [9]. Seu *pulsilogium* antecedeu invenções similares de Galileu Galilei, Paolo Sarpi (1552-1623) e Giovanni Francesco Sagredo (1571-1620), que são também possíveis inventores deste instrumento ao lado de Santorio.

Mas, talvez, a maior das aplicações dos pêndulos esteja voltada para a cronometragem do tempo, sendo os seus princípios usados para a construção dos relógios mecânicos, mais conhecidos como relógios de pêndulo. A isso, o primeiro relógio de pêndulo patenteado foi o relógio de Christian Huygens (1629-1695) que, por volta de 1656, conseguiu aperfeiçoar as suas ideias e construir o que seria um dos primeiros relógios de pêndulo, em que o instrumento era constituído basicamente por um pêndulo e um conjunto de engrenagens que permitiam o funcionamento, juntamente com contrapesos [1]. Apesar do fato desses relógios terem de ser regulados de tempos em tempos, ainda assim, a sua invenção foi um avanço muito importante para o desenvolvimento das ciências e a forma como se media o tempo.

Os relógios no tempo de Galileu, que eram regulados por uma vara horizontal e um peso,

revelam que a ideia de movimento oscilatório já estava sendo aplicada de forma rudimentar, esses mecanismos, embora tentassem seguir um padrão repetitivo como o pêndulo, não eram precisos. O sistema de vara horizontal movida por um peso e com pequenos ajustes de peso, não era suficiente para garantir uma medição confiável do tempo, esse tipo de relógio ainda dependia muito da habilidade de quem o ajustava e tinha um desempenho inconsistente, dado que era frequentemente necessário recalibrá-lo.

Figura 1. Sanctorius Sanctorius (1561-1636) considerado por alguns como inventor do primeiro instrumento científico usando pêndulo.



Fonte: [10].

Galileu foi um dos primeiros a usar o pêndulo para a cronometragem [1]. Ele reconhecia o potencial do pêndulo como um mecanismo regulador de tempo e tentou, de forma pioneira, criar um cronômetro astronômico, mas não chegou a desenvolver um relógio de pêndulo funcional que fosse confiável o suficiente para medir o tempo com precisão, muito disso, devido a certos conhecimentos matemáticos e técnicos que ele não dispunha nessa época. Segundo [4],

Huygens refinou a teoria pendular de Galileu; ele estudou problemas relacionados à construção de relógios por quase 40 anos, de 1656 até 1693. Galileu havia sugerido, em 1636, acoplar um contador ao pêndulo, porém tentou fazê-lo somente em 1641, falecendo em 1642. Assim, a prioridade da patente foi concedida a Huygens [4].

Então, foi Huygens o primeiro cientista moderno a construir um relógio de pêndulo funcional. Há vários princípios, tanto físicos como matemáticos e, também de engenharia, que Huygens teve que aperfeiçoar para chegar ao seu instrumento, sendo que, em 1656, ele inventou o relógio de pêndulo e o patenteou em 1657 [1].

Parece curioso que a propriedade dos pêndulos de balançar em tempos iguais (isocronismo) não tivesse sido aplicada muito antes de Galileu na cronometragem e usada em investigações científicas.

Há algum tempo, dizia-se que um astrônomo árabe da Idade Média, Ibn Yunus (950–1009), teria estudado algumas propriedades dos pêndulos e descoberto a lei do isocronismo dos pêndulos, mas não há evidências consistentes sobre isso [2]. Os relógios, na época de Galileu, eram regulados por uma vara horizontal, impelida para a frente e para trás através de um pequeno ângulo por um peso ligado a um fio, tal como os pêndulos, mais tarde, eram mantidos a balançar em relógios de pêndulo. A velocidade desses relógios podia ser ajustada movendo pequenos pesos suspensos da vara, mas nunca eram de confiança devido à sua volatilidade [5].

Um problema que ainda não havia sido plenamente resolvido no século XVII era a questão do movimento dos pêndulos [2]. Claro que tanto Galileu como Huygens foram bastante longe no estudo dos pêndulos, como a lei do isocronismo dos pêndulos, dentre outras propriedades matematicamente verificáveis. Ainda restava a questão da descrição das equações do movimento de um pêndulo simples e, a teoria para descrever este tipo de fenômeno só surgiria após o estabelecimento do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz, no final do século XVII [2]. Foi apenas com o aparecimento do cálculo que os primeiros problemas envolvendo equações diferenciais se tornaram possíveis de serem solucionados. Em 1734, o físico e matemático suíço, Leonhard Euler (1707–1783) apresentou, pela primeira vez na história, a equação diferencial do pêndulo e, foi ele o primeiro a dar soluções para ela.

2 A equação geral do pêndulo simples

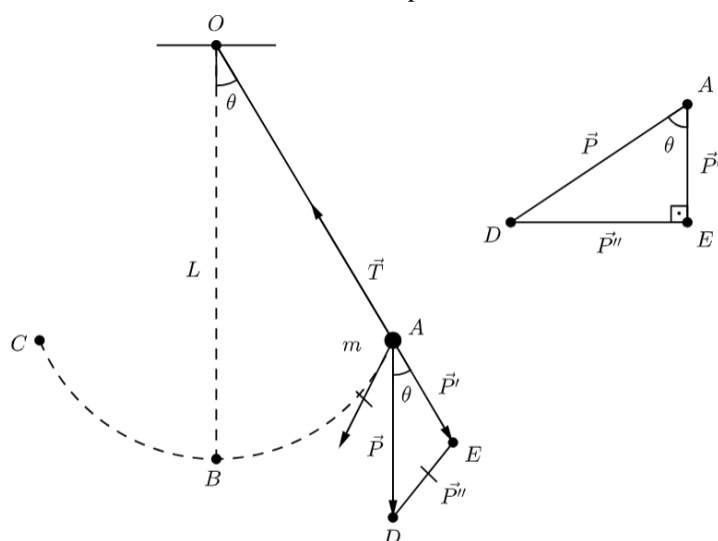
Considere uma partícula de massa m suspensa por um fio inextensível de comprimento L , preso por uma de suas extremidades em um suporte fixo O no teto, enquanto a outra extremidade sustenta o pequeno corpo de massa m . Neste caso, as dimensões do fio são desprezíveis com relação ao seu comprimento. O sistema constituído pela partícula de massa m e pelo fio L é denominado **pêndulo simples**. Como ilustrado na Figura 2, podemos destacar o eixo OB , o qual denominaremos de eixo de oscilação; a curva ABC , correspondente a um arco de circunferência de raio L ; o ângulo θ é formado pela corda e o eixo OB . O ponto B é chamado de ponto de equilíbrio estável, pois, quando deslocado de sua posição inicial (de equilíbrio), o corpo tende a retornar à sua posição original, veja [11]. Ademais, definimos que θ é medido a partir da vertical, onde θ é positivo no sentido anti-horário.

O sistema inicialmente encontra-se em repouso, estando a partícula na posição do ponto B , se o corpo for descolado de sua posição de equilíbrio, então, o sistema entra em movimento que se dá ao longo da curva ABC , sendo os pontos A e C as amplitudes do movimento pendular. Este movimento é caracterizado por uma oscilação em torno do ponto de equilíbrio B e, sendo um movimento regular, existe um período T , chamado de **período de oscilação** que é o tempo que o pêndulo leva para completar um ciclo completo que é realizar uma volta completa (ida e volta) no arco ABC .

O pêndulo é sujeito a duas forças principais, o peso $\vec{P}$, que pela segunda lei de Newton, podemos escrever, $\vec{P} = m\vec{g}$, que atua para baixo, onde m é a massa do objeto e g é a aceleração da gravidade, a outra força é a tensão ou tração $\vec{T}$, que age ao longo da corda. Para a dinâmica do pêndulo, nos concentramos na força de gravidade que gera o peso, que é efetivamente a causa do movimento de oscilação, que é aquele que caracteriza estes instrumentos.

O peso $\vec{P}$ do corpo de massa m é decomposto em suas componentes tangencial $\vec{P}''$ e normal $\vec{P}'$. Pelo triângulo retângulo DAE da figura 2, este nos permite escrever a seguinte relação entre o peso $\vec{P}$ e a sua componente $\vec{P}''$, em módulo, tem-se que, $P'' = P \cdot \sin \theta$.

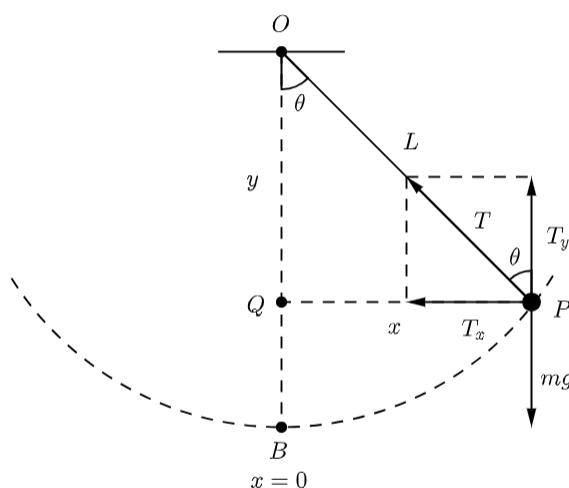
Figura 2. Um pêndulo de comprimento L e massa m se desloca numa trajetória que cobre o arco ABC, a lei do isocronismo vale para pequenas oscilações. O diagrama abaixo representa as forças no movimento do pêndulo.



Fonte: autor.

Porém, ao invés de usar o sistema de coordenadas radial como destacado na Figura 2, vamos usar o sistema cartesiano e, para isso, iremos decompor a tração nas componentes x e y , deste modo, observe a Figura 3, a seguir.

Figura 3. Decomposição da tração da corda em suas componentes cartesianas.



Fonte: autor.

Nesta figura, tem-se que o pêndulo está em movimento e se encontra na posição $P(x, y)$, podemos escrever as seguintes relações entre as componentes: $T_x = T \cdot \sin \theta$ e $T_y = T \cdot \cos \theta$. Conforme podemos observar pela Figura 3, o sistema possui apenas a componente a_x , sendo que a componente referente ao eixo y , a_y , é nula, pois a força resultante, $F_y = T_y$, se anula com o peso na vertical. E, deste modo, usando a segunda lei de Newton, podemos escrever as seguintes relações,

$$-T \cdot \sin \theta = m \cdot a_x, \quad (1)$$

$$T \cdot \cos \theta - mg = m \cdot a_y \Rightarrow T \cdot \cos \theta - mg = 0.$$

Na relação (1), o sinal negativo aparece devido ao fato de a força F_x , que é a resultante do movimento, apontar sempre no sentido contrário ao movimento do pêndulo, isso se deve basicamente da orientação dos eixos. Note que a força que age nesse sistema pendular é do tipo restauradora, pois ela sempre busca retornar ao ponto de equilíbrio, esta força é uma característica física do sistema em questão. Como bem o sabemos, em todo sistema oscilatório existe um tipo de força restauradora, como é o caso do sistema massa-mola, o movimento ondulatório, entre outros. Agora faremos uso da seguinte aproximação, isto é, vamos considerar que o movimento do pêndulo se dá para ângulos pequenos, $\theta \approx 0$. Quando fazemos isso, observe que, tomando a aproximação $\theta \ll 1$, teremos que a equação $T \cdot \cos \theta - mg = 0$ resulta em $T \approx mg$, podendo aproximar para a igualdade $T = mg$. Neste caso, sendo a aceleração resultante do movimento dada por a_x , podemos escrevê-la como $a_x = d^2x/dt^2$ e, então, substituindo as considerações que fizemos em (1), temos que,

$$-mg \cdot \sin \theta = m \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g \cdot \sin \theta = 0.$$

Pelo triângulo retângulo ΔOPQ da Figura 3, podemos escrever $\sin \theta \approx x/L$ e, substituindo na relação anterior, tem-se que,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (2)$$

Esta equação diferencial pode ser chamada de **Equação Diferencial do Pêndulo Simples** para pequenas oscilações e, como podemos notar, a mesma se trata da equação que descreve o movimento do Oscilador Harmônico Simples (MHS). Tal relação se trata de uma equação diferencial linear de segunda ordem, $x'' + \omega_0^2 x = 0$, tendo como equação característica, $r^2 + \omega_0^2 = 0$, cujas as raízes são: $r = \pm i \omega_0$. Para equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com raízes características complexas, a solução geral é dada por,

$$x(t) = c_1 \cdot \cos \omega_0 t + c_2 \cdot \sin \omega_0 t.$$

Fazendo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $c_1 = A \cdot \cos \phi$ e $c_2 = -A \cdot \sin \phi$, sendo ϕ , o chamado ângulo de fase, com isso, teremos,

$$x(t) = A \cdot \cos \phi \cdot \cos \omega_0 t - A \cdot \sin \phi \cdot \sin \omega_0 t$$

Pelo uso da identidade trigonométrica do cosseno da soma, chegamos a,

$$x(t) = A \cdot \cos (\omega t + \phi) \quad (3)$$

E, portanto, esta é a solução da equação diferencial do pêndulo simples [7, 8, 12], para a situação em que temos a aproximação $\theta \approx 0$. Como no MHS, ω representa a velocidade angular que é $\omega = 2\pi/T$, logo,

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

E a frequência do movimento é tal que,

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Portanto, o período do pêndulo simples independe do ângulo θ , isso é precisamente a chamada **Lei do Isocronismo do Pêndulo** que Galileu esteve tão empenhado em provar durante as suas pesquisas sobre os pêndulos. Entretanto, ela não é uma lei geral, sendo válida apenas para pequenas oscilações do pêndulo [7, 8]. Experimentalmente, pode ser comprovado que não vale a lei do isocronismo, se não admitimos a aproximação $\theta \approx 0$ [7, 8, 11, 12].

3 Dinâmica do pêndulo simples

Considere a Figura 2, podemos identificar duas forças associadas ao sistema pendular, a saber, a força peso $\vec{P}$ e a tração no fio $\vec{T}$. A força tangencial $\vec{P}'$ é a responsável pela aceleração do pêndulo, enquanto a componente radial da força $\vec{P}'$ é a parte da força gravitacional que está alinhada com a direção do fio; é ela a responsável por manter o pêndulo “preso” à trajetória circular. Quando falamos da componente radial da força, estamos nos referindo à componente do peso que atua ao longo da direção do fio, ou seja, ao longo da linha que conecta o pêndulo ao ponto de suspensão. Podemos dizer que a força radial, nesse sistema, se trata da força centrípeta. A força centrípeta tem a função de manter o movimento circular do pêndulo pois, como ele se move ao redor de um ponto fixo com uma distância sempre constante L em relação a este, seu movimento é circular. Pela Figura 2, escrevemos que o módulo da força radial é tal que,

$$P' = mg \cdot \cos \theta.$$

A componente tangencial é a parte da força gravitacional que age na direção tangencial ao movimento do pêndulo, ou seja, ao longo do arco da trajetória circular. Ela é a responsável por causar a aceleração do pêndulo ao longo desse arco e, portanto, é a força que gera o movimento oscilatório. Quando o pêndulo está na sua posição mais distante em relação ao ponto de equilíbrio e, conseqüentemente, com o maior valor de θ , a componente tangencial é maior e o pêndulo começa a descer, acelerando em direção ao centro. Quando o pêndulo passa pela posição vertical (ponto B), a componente tangencial se anula e a aceleração tangencial é zero; contudo, a velocidade tangencial é máxima nesse ponto. Após passar pela posição de equilíbrio, o pêndulo continua seu movimento devido à sua inércia, mas agora a componente tangencial se inverte, começando a desacelerá-lo à medida que ele se aproxima do ponto mais afastado do outro lado, tal processo se repete periodicamente [7, 11, 13].

Esse ciclo de aceleração e desaceleração é o que gera o movimento oscilatório do pêndulo, que se configura pelo movimento de ida e volta em torno do ponto de equilíbrio. De acordo com a Figura 2, o módulo da componente tangencial é dado por,

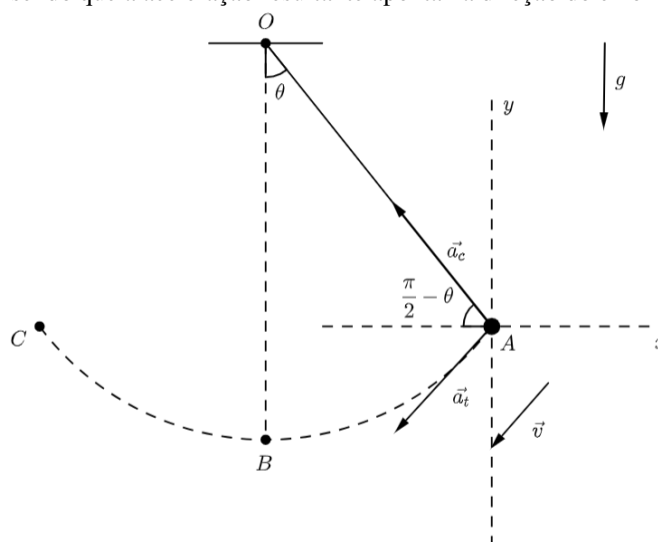
$$P'' = mg \cdot \sin \theta.$$

Associada a cada uma das componentes da força, existe uma certa aceleração. Estas são a aceleração radial, que é a aceleração centrípeta a_c , que aponta para o ponto de fixação do pêndulo e, é responsável por mudar a direção da velocidade durante o movimento, e a aceleração tangencial a_t . Esta última está associada à variação do módulo da velocidade do pêndulo ao longo da sua trajetória, a_t é aceleração responsável pela mudança da velocidade, ou seja, pela aceleração ou desaceleração do movimento, estando relacionada à componente da força gravitacional que atua ao longo da direção tangente à trajetória.

A aceleração tangencial é tangente à trajetória e atua na mesma direção da velocidade quando o corpo está acelerando e, na direção oposta quando está desacelerando. Na Figura 4, encontramos uma representação das componentes radial e tangencial da aceleração do pêndulo. Pela segunda lei de Newton, a força resultante na direção tangencial é dada por,

$$F_t = mg \cdot \sin \theta = m \cdot a_t \quad \rightarrow \quad a_t = g \cdot \sin \theta. \quad (4)$$

Figura 4. Representação esquemática das acelerações radial e tangencial, sendo que a aceleração resultante aponta na direção do eixo x.



Fonte: autor.

Para encontrar a aceleração centrípeta é útil considerar o seguinte raciocínio. Considere o pêndulo sendo deslocado para a posição mais alta em relação ao ponto de equilíbrio, ponto A. Se o pêndulo for deixado cair desta posição, ele percorrerá, até atingir um ponto B (um ponto qualquer acima da posição de equilíbrio C) a uma altura Δh , veja a Figura 5. Em um sistema isolado como é este que estamos considerando, teremos que, quando pêndulo estiver em uma posição qualquer, parte da energia potencial do pêndulo será convertida em energia cinética, e, neste caso, temos,

$$m \cdot g \cdot \Delta h = \frac{mv^2}{2} \quad \rightarrow \quad g \cdot \Delta h = \frac{v^2}{2}.$$

Pela figura 5, considerando o triângulo $\triangle ODB$, podemos escrever,

$$\Delta h = L \cdot \cos \theta.$$

Deste modo, vamos reescrever a relação anterior da seguinte maneira,

$$g \cdot L \cdot \cos \theta = \frac{v^2}{2}.$$

A aceleração centrípeta para este sistema pendular é aquela devido ao movimento no arco circular de raio L , portanto, a aceleração centrípeta é $a_c = v^2/L$, e pela expressão anterior, podemos escrever,

$$\frac{v^2}{L} = 2g \cdot \cos \theta \rightarrow a_c = 2g \cdot \cos \theta. \quad (5)$$

Então, agora que estamos com a disposição da aceleração centrípeta a_c e da aceleração tangencial a_t do pêndulo, logo, vejamos qual é a relação da aceleração total a . Como essas acelerações são perpendiculares entre si (uma atua na direção tangencial e a outra na direção radial), podemos calcular a aceleração total pela regra do paralelogramo,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}.$$

Substituindo as relações anteriores, tem-se,

$$a = \sqrt{(g \cdot \sin \theta)^2 + (2g \cdot \cos \theta)^2} \rightarrow a = \sqrt{g^2 \cdot \sin^2 \theta + 4g^2 \cdot \cos^2 \theta},$$

$$a = g \cdot \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cdot \cos^2 \theta}. \quad (6)$$

Logo, a força resultante F_R que age sobre o pêndulo pode ser obtida aplicando a segunda lei de Newton, $F_R = ma$, onde m é a massa do pêndulo e a é a aceleração total do sistema, isto é,

$$F_R = mg \cdot \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cdot \cos^2 \theta}. \quad (7)$$

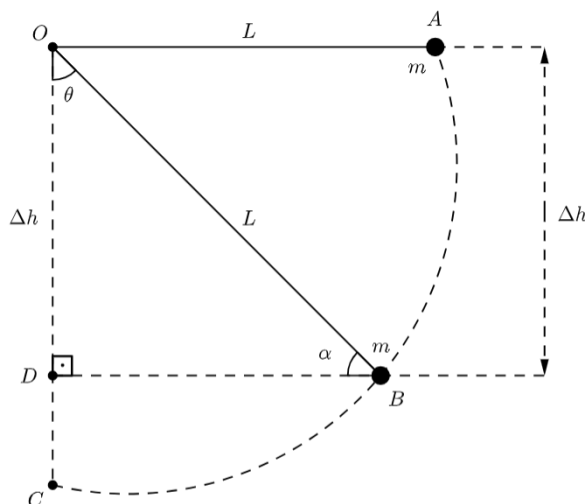
Podemos reescrever essa relação por meio da identidade trigonométrica fundamental $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, isto é,

$$\sin^2 \theta + 4 \cdot \cos^2 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 3 \cdot \cos^2 \theta = 1 + \cos^2 \theta,$$

E, com isso, obtemos,

$$F_R = mg \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 \theta}.$$

Figura 5. Quando no ponto A o pêndulo tem energia cinética máxima, quando ele cai para a posição B parte de sua energia potencial transforma-se em cinética.



Fonte: autor.

Se considerarmos um referencial onde o ponto de suporte do pêndulo (o ponto O) seja a origem do sistema de referência, a haste do pêndulo tem um comprimento fixo L . Assim, a posição da massa m em um ponto qualquer $P(x, y)$ em coordenadas cartesianas, Figura 3, é dada por,

$$x = L \cdot \sin \theta, \quad y = -L \cdot \cos \theta. \quad (8)$$

A velocidade do corpo será a derivada do vetor posição, com relação ao tempo, no caso do movimento circular, o comprimento do arco percorrido pela massa m é dado pela relação do comprimento de arco,

$$S = L \cdot \theta. \quad (9)$$

E, derivando (9) em relação ao tempo, teremos uma relação para a velocidade do pêndulo para o referido referencial adotado,

$$v = \frac{dS}{dt} = L \frac{d\theta}{dt}.$$

Agora que já temos a velocidade, vejamos quem é a energia cinética T de uma partícula presa numa haste de comprimento L , fixa em um ponto fixo O , em movimento pendular. Sabemos que a energia cinética de qualquer movimento é $T = mv^2/2$, como já vimos no caso do pêndulo, a velocidade tangencial do corpo de massa m é dada por $v = L \cdot d\theta/dt$, substituindo essa última relação na equação da energia cinética, teremos,

$$T = \frac{1}{2}mL^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \quad (10)$$

Agora busquemos encontrar a energia potencial associada ao pêndulo. Primeiramente, devemos ter em mente que, quando um pêndulo está fora de sua posição de equilíbrio, ele adquire energia potencial devido à ação gravitacional. Como é do nosso conhecimento, a energia potencial gravitacional é $U = mgh$, onde consideramos que h é a altura da massa em relação à posição de mínimo, que é o ponto mais baixo da oscilação, quando o pêndulo está na sua posição de equilíbrio. Por meio da Figura 6, apresentada a seguir, podemos mostrar que a altura pode ser dada por,

$$h = L - L \cdot \cos \theta \quad \rightarrow \quad h = L \cdot (1 - \cos \theta).$$

Desse modo, a energia potencial do pêndulo para um ângulo θ qualquer é,

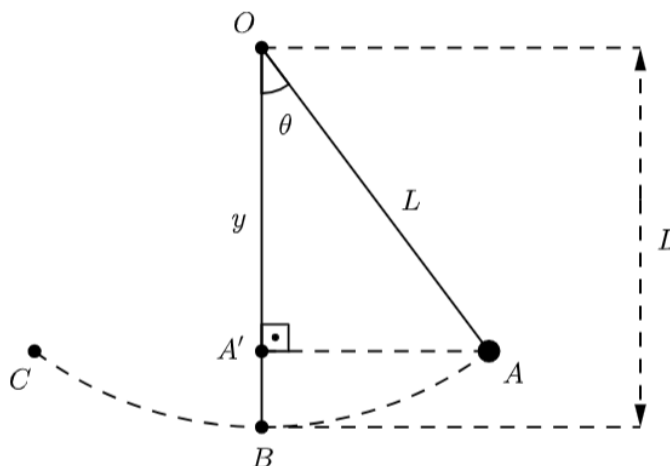
$$U = mgL \cdot (1 - \cos \theta).$$

Portanto, a energia total do pêndulo é dada por,

$$E = T + U,$$

$$E = \frac{1}{2}mL^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL \cdot (1 - \cos \theta). \quad (11)$$

Figura 6. A altura que queremos descobrir é representada pelo segmento A'B.



Fonte: autor.

Não é difícil mostrar que a energia nesse sistema é conservada, pois se considerarmos um pêndulo em um sistema fechado, onde atua apenas a força peso e, caso não haja atrito ou resistência do ar, então, como a força peso é conservativa, temos que o sistema é conservativo. Portanto, como a energia total é conservada, logo, se tomarmos a derivada temporal da energia devemos ter $dE/dt = 0$ e, então, podemos escrever,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m L^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m g L \cdot (1 - \cos \theta) \right) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(m L^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) + \frac{d}{dt} (m g L \cdot (1 - \cos \theta)) = 0.$$

Pela regra da cadeia, a derivada da primeira parcela fica determinada por,

$$\frac{1}{2} m L^2 \cdot \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \Rightarrow \frac{1}{2} m L^2 \cdot 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \Rightarrow m L^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

E, então, vamos ter que a taxa de variação da energia fica,

$$m L^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + m g L \cdot \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\theta}{dt} \left(m L^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + m g L \cdot \sin \theta \right) = 0.$$

Algebricamente devemos esperar que ou $d\theta/dt = 0$, o que nos levaria a conclusão de que $\theta(t) = C$, onde C é uma constante, porém, como bem o sabemos, $\theta(t)$ é uma função variável, logo, o caso que realmente interessa é a outra possibilidade, isto é,

$$m L^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + m g L \cdot \sin \theta = 0.$$

E, simplificando por mL^2 , teremos,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \sin \theta = 0.$$

Que é a mesma equação do pêndulo dada inicialmente, o que mostra que quando consideramos um sistema conservativo para o movimento do pêndulo, a equação que descreve tal situação é certamente a equação (2). Agora, vamos analisar o momento angular do pêndulo, pois esta é uma grandeza importante quando estamos lidando com o movimento de um pêndulo. Cabe enfatizar que o pêndulo se move em um arco de círculo ABC, conforme a Figura 2, logo, existe uma quantidade de movimento associada ao movimento angular do corpo. Vamos adotar um sistema de coordenadas polares, onde o ponto de apoio do pêndulo está na origem $O(0, 0)$, a posição da massa do pêndulo pode ser escrita em termos de coordenadas polares, onde o raio é $r = \ell$ e o ângulo θ mede a inclinação do fio a partir da vertical. A conversão entre coordenadas polares (r, θ) e coordenadas cartesianas (x, y) , segue as relações dadas anteriormente e, deste modo, ficamos com,

$$\vec{r}(t) = x \hat{r} + y \hat{\theta} \rightarrow \vec{r}(t) = (\ell \cdot \sin \theta) \hat{r} + (-\ell \cdot \cos \theta) \hat{\theta}.$$

Neste caso derivando o vetor posição, teremos a velocidade da partícula,

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} ((\ell \cdot \sin \theta) \hat{r} + (-\ell \cdot \cos \theta) \hat{\theta}), \\ &= \ell \cdot \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{r} + \ell \cdot \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}. \end{aligned}$$

Logo o momento linear da partícula é dado por,

$$\begin{aligned} \vec{p} = m\vec{v} &\Rightarrow \vec{p} = m \cdot \left(\ell \cdot \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{r} + \ell \cdot \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \right), \\ \vec{p} &= m\ell \frac{d\theta}{dt} \cdot (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}). \end{aligned}$$

Então, o momento angular fica determinado por,

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p}, \\ &= ((\ell \cdot \sin \theta) \hat{r} + (-\ell \cdot \cos \theta) \hat{\theta}) \times \left(m\ell \frac{d\theta}{dt} (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \right). \end{aligned}$$

Por definição, temos que o momento pode ser calculado pelo determinante,

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{k} \\ \ell \cdot \sin \theta & -\ell \cdot \cos \theta & 0 \\ m\ell \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos \theta & m\ell \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin \theta & 0 \end{vmatrix}.$$

E, resolvendo este determinante, encontramos que o momento angular fica determinando pela seguinte expressão,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \left(\ell \cdot \sin \theta \cdot m\ell \frac{d\theta}{dt} \sin \theta - (-\ell \cdot \cos \theta) \cdot m\ell \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right) \hat{k}, \\ &= \left(m\ell^2 \frac{d\theta}{dt} \cdot (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \right) \hat{k}, \\ \vec{L} &= m\ell^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{k}.\end{aligned}$$

Como o movimento ocorre no plano do pêndulo, é válido que o momento angular seja perpendicular ao plano xy, logo, o momento tem apenas uma componente. Neste caso, podemos tratá-lo como um escalar e, com isso, temos,

$$L = m\ell^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

A taxa de variação do momento angular do pêndulo é,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m\ell^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Pela segunda lei de Newton para a dinâmica rotacional, a derivada temporal do momento angular é o torque, τ , voltando à notação vetorial,

$$\vec{\tau} = m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{k}.$$

Com base no princípio de conservação de energia, somos capazes de deduzir uma relação para a velocidade tangencial. Sabemos que quando o pêndulo está em uma posição para a qual o ângulo $\theta \neq 0$, a energia potencial gravitacional U do sistema é dada por,

$$U = mgh.$$

Já vimos que a altura h associada à massa do pêndulo é,

$$h = L \cdot (1 - \cos \theta).$$

E, portanto, a energia potencial no ponto de altura h é tal que,

$$U = mgL \cdot (1 - \cos \theta).$$

Como o sistema que estamos considerando é conservativo, nesse ponto de altura h , existe uma energia cinética associada, $T = 1/2 \cdot mv^2$, onde v é o módulo da velocidade tangencial. No caso, no ponto mais baixo da trajetória, toda a energia é cinética, pois a altura h é zero, então, a energia potencial é zero, pois adota-se o nível de energia potencial nula na posição de equilíbrio ($\theta = 0$), no ponto mais alto, toda a energia é potencial e a energia cinética é zero. No ponto mais baixo da trajetória, escrevemos o seguinte,

$$T = \frac{1}{2} m (v_{max})^2.$$

Onde v_{max} é a velocidade máxima atingida quando o pêndulo encontra-se na posição mais baixa. Neste ponto, se concentra toda a energia do sistema, isto é, a energia mecânica total E que é igual a energia cinética máxima no ponto mais baixo da trajetória, $E = T$. Porém, num ponto qualquer, com um ângulo θ , a energia mecânica total é dada por,

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot L \cdot (1 - \cos \theta).$$

Mas, como a energia mecânica total é igual a energia cinética máxima, $E = T_{max}$, logo, podemos escrever o seguinte,

$$\frac{1}{2}m(v_{max})^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgL \cdot (1 - \cos \theta).$$

Simplificando última relação e dividindo ambos os membros por m , tem-se

$$\frac{1}{2}(v_{max})^2 = \frac{1}{2}v^2 + gL \cdot (1 - \cos \theta). \quad (12)$$

Pelo princípio da conservação de energia, podemos encontrar a velocidade máxima atingida pelo pêndulo. A energia total do sistema é constante e, no ponto mais baixo, toda a energia é cinética e, no ponto mais alto, toda a energia é potencial. Assim, podemos igualar a energia total no ponto mais baixo com a energia total no ponto mais alto,

$$\frac{1}{2}m(v_{max})^2 = mgL \cdot (1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{1}{2}(v_{max})^2 = gL \cdot (1 - \cos \theta).$$

Se considerarmos que a partícula está no ponto mais alto, quando $\theta = \pi/2$, logo,

$$\frac{1}{2}(v_{max})^2 = gL \cdot (1 - \cos \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{1}{2}(v_{max})^2 = gL \cdot (1 - 0),$$

$$\frac{1}{2}(v_{max})^2 = gL,$$

$$v_{max} = \sqrt{2gL}. \quad (13)$$

E, assim, temos a velocidade tangencial máxima no ponto de equilíbrio do pêndulo. Voltando a equação (12), substituindo a velocidade v_{max} , temos,

$$\frac{1}{2}(2gL) = \frac{1}{2}v^2 + gL \cdot (1 - \cos \theta) \Rightarrow gL = \frac{1}{2}v^2 + gL \cdot (1 - \cos \theta),$$

$$gL - gL \cdot (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}v^2,$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gL \cdot \cos \theta.$$

E, assim, temos que a velocidade tangencial do pêndulo fica determinada por,

$$v = \sqrt{2gL \cdot \cos \theta}. \quad (14)$$

Agora vamos considerar um caso um pouco mais geral. Suponha que o pêndulo seja solto a partir do repouso em um ângulo θ_0 , em que, $\theta_0 \neq 0$ e, não sendo θ_0 necessariamente igual a $\pi/2$, neste caso, a energia potencial no ponto é,

$$U_0 = mgh_0 = mgL \cdot (1 - \cos \theta_0).$$

Essa é a energia mecânica total do pêndulo, pois se o sistema é conservativo, como estamos considerando, então, a energia inicial permanece constante, após qualquer transformação que o sistema tenha passado. Supondo que o pêndulo depois de solto da sua posição inicial θ_0 , ele atinja uma posição, na qual, o ângulo seja θ , então, a sua energia mecânica nesse ponto será,

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgL \cdot (1 - \cos \theta).$$

Porém, como devemos esperar, a energia mecânica total E é conservada, logo, podemos igualar a energia mecânica inicial do sistema que é a energia potencial máxima com a energia no ponto onde o ângulo é θ , isto é, $E(\theta_0) = E(\theta)$ e, assim, escrevemos,

$$mgL(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 + mgL \cdot (1 - \cos \theta).$$

Simplificando a expressão e isolando a velocidade tangencial v , temos,

$$\frac{1}{2}v^2 = gL \cdot (1 - \cos \theta_0) - gL \cdot (1 - \cos \theta),$$

$$\frac{1}{2}v^2 = -gL \cdot \cos \theta_0 + gL \cdot \cos \theta,$$

$$v^2 = 2gL \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0),$$

$$v = \sqrt{2gL \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0)}. \quad (15)$$

E, desse modo, chegamos a velocidade tangencial para o movimento do pêndulo simples, isso para o caso geral, no qual, o pêndulo é solto de uma posição arbitrária. E, podemos confirmar o caso particular, onde se supõe que o pêndulo parte da posição $\theta_0 = \pi/2$ e, se substituirmos este ângulo na fórmula (15), obtemos,

$$v = \sqrt{2gL \cdot \cos \theta}.$$

Que é justamente a relação anterior que obtivemos para quando o ângulo de partida do pêndulo θ_0 é igual a $\pi/2$.

Continuando a nossa discussão a respeito da dinâmica do pêndulo simples, vamos fazer a partir de agora algumas considerações sobre a força resultante nesse sistema em alguns pontos de sua trajetória, pois já temos conhecimento da magnitude dessa grandeza. Conforme vimos, anteriormente e, pela figura 2, podemos deduzir facilmente que a força radial centrípeta é aquela devido a componente $\vec{P}'$ do peso e a tração $\vec{T}$ do fio e, podemos escrever,

$$F_c = T - mg \cdot \cos \theta.$$

Pela Segunda Lei de Newton, em relação, exclusivamente, à força centrípeta, $F_c = m \cdot a_c$, sabendo que a aceleração centrípeta é $a_c = g \cdot \cos \theta$, logo,

$$m \cdot (2g \cdot \cos \theta) = T - mg \cdot \cos \theta,$$

$$T = mg \cdot \cos \theta + 2mg \cdot \cos \theta = 3mg \cdot \cos \theta.$$

Portanto, a tração (ou tensão) do fio pode ser calculada em função de θ e, para qualquer ângulo em que o pêndulo se encontre em seu movimento na trajetória ABC, por,

$$T(\theta) = 3mg \cdot \cos \theta, \quad (16)$$

Quando o pêndulo se encontra na posição de equilíbrio ($\theta = 0$), a força do sistema pendular possui um certo valor. Considerando o pêndulo OAB, na posição B, figura 2, então o pêndulo se encontra no ponto mais baixo da sua trajetória, neste ponto, a aceleração centrípeta é zero, $a_t = g \cdot \sin 0 = 0$, pois a gravidade aponta exatamente na mesma linha do fio. E, desse modo, a aceleração total do pêndulo passa a ser puramente centrípeta, isto é, $a = a_c = 2g \cdot \cos 0 = 2g$. E, com isso, a força resultante do sistema é dada por,

$$F_R = mg \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot (1)^2} = 2mg.$$

Vamos agora provar que a força resultante do pêndulo simples atinge o seu valor máximo no ponto de equilíbrio, isto é, no ponto B, o ponto de equilíbrio do sistema, tem-se que $F_{R_{max}} = 2mg$. Para tanto, partimos da expressão da força resultante F_R obtida anteriormente,

$$F_R = mg \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 \theta}.$$

Nessa expressão, m e g são constantes positivas, portanto, maximizar $F_R(\theta)$ equivale a maximizar a função interna dentro do radical, assim, tomando a função $g(\theta)$,

$$g(\theta) = 1 + 3 \cdot \cos^2 \theta.$$

Temos por objetivo maximizar essa função, para tanto, devemos encontrar os seus pontos críticos, por meio da sua derivada. Derivando a função $g(\theta)$ em relação a θ , temos,

$$g'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (1 + 3 \cdot \cos^2 \theta) = 3 \cdot \frac{d}{d\theta} (\cos^2 \theta).$$

Pela regra da cadeia, $g'(\theta)$, fica, então, determinada por,

$$g'(\theta) = 3 \cdot 2 \cos \theta \cdot (-\sin \theta) = -6 \cdot \cos \theta \sin \theta.$$

Usando a identidade do arco duplo, isto é, $\sin(2\theta) = 2 \cdot \sin \theta \cos \theta$, com isso, podemos reescrever a expressão,

$$g'(\theta) = -3 \cdot \sin(2\theta).$$

Os pontos críticos de uma função g são os valores de x , dentro do domínio de g , para os quais $g'(x) = 0$ ou, nos quais g' é indefinida. Neste caso, façamos,

$$g'(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 \cdot \sin(2\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2\theta) = 0.$$

A solução dessa equação trigonométrica ocorre quando $2\theta = k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$. Para $k = -1, 0, 1$, temos assegurada a igualdade $2\theta = k\pi$. Da infinidade de valores possíveis que satisfazem essa equação, só escolhemos três valores de k , porque o domínio da função F_R está restrito ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Então, se $k = -1 \rightarrow \theta = -\pi/2 \text{ rad}$, se $k = 0 \rightarrow \theta = 0$ e, se $k = 1 \rightarrow \theta = \pi/2 \text{ rad}$. Desse modo, em graus, os pontos críticos da função são as posições angulares $\theta = -90^\circ, \theta = 0^\circ$ ou $\theta = 90^\circ$.

Vamos agora usar o teste da derivada segunda para descobrir se os pontos críticos da função são pontos de máximo local, de mínimo local ou, eventualmente, se o teste é inconclusivo. Calculando a derivada segunda de g , temos que,

$$g''(\theta) = \frac{d}{d\theta}(-3 \cdot \sin(2\theta)) = -6 \cdot \cos(2\theta).$$

Vejamos, se substituirmos $\theta = 0$ em $g''(\theta)$, obtemos, $g''(0) = -6 \cdot \cos 0 = -6$, enquanto que substituindo $\theta = \pi/2$ ou $\theta = -\pi/2$ em $g''(\theta)$, teremos $g''(\pi/2) = -6 \cdot \cos(2 \cdot \pi/2) = 6$, e, de maneira análoga, temos o mesmo para $g''(-\pi/2) = 6$. Como, pelo teste da segunda derivada, de acordo com [14], se $x = c$ é um ponto crítico de uma função g , ou seja, $g'(c) = 0$, calculamos a segunda derivada $g''(c)$ e verificamos: i) se $g''(c) > 0$, então g possui um mínimo local em $x = c$; ii) se $g''(c) < 0$, então g possui um máximo local em $x = c$; iii) se $g''(c) = 0$, o teste é inconclusivo. Portanto, pelo teste da segunda derivada, tem-se que $\theta = 0$ é um máximo local estrito e $\theta = \pm\pi/2$ são mínimos locais estritos. Para $\theta = 0$, já vimos anteriormente que $F_R = 2 \cdot mg$ e, do mesmo modo,

$$F_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = mg \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = mg.$$

E, analogamente, temos o mesmo resultado para $\theta = -\pi/2$, logo, de fato, entre os três pontos críticos, $\theta = 0$ é o ponto de máximo absoluto, logo fica provado que a força resultante F_R do sistema pendular é máxima no ponto mais baixo de sua trajetória, ou dito de outra forma, na posição de equilíbrio $\theta = 0$. Como $\pi/2$ e $-\pi/2$ são também pontos críticos da função, e se não são pontos de máximo, logo são os pontos de mínimo da função e, com isso, como temos $F_R(\pi/2) = F_R(-\pi/2) = mg$ é o valor mínimo assumido pela função. Assim, nas extremidades superiores do movimento, ou seja, nos pontos mais altos onde o pêndulo atinge a horizontal, $\theta = 90^\circ$ e $\theta = -90^\circ$, a força resultante do sistema pendular é mínima e é exatamente o próprio peso do corpo suspenso pela corda.

Outra situação a se considerar é, mesmo supondo o pêndulo simples como um sistema ideal, poderíamos, ainda assim, supor a existência de uma força de resistência do ar, isso estaria aproximando o comportamento do pêndulo simples ao comportamento de um sistema real, onde a resistência do ar é uma força de certa relevância que atua retardando o movimento ideal do pêndulo. Neste caso, estaríamos adicionando uma força dissipativa no sistema e, portanto, não haveria mais conservação da energia. A resistência do ar é uma força de arrasto, F_{arrasto} , que atua na direção tangencial, com sentido sempre oposto à velocidade instantânea $\vec{v}$ e, para velocidades relativamente baixas, modelamos essa força de arrasto como proporcional à velocidade. Como um pêndulo é um objeto que se move a velocidades relativamente baixas, então, um modelo linear é uma boa aproximação,

$$F_{\text{arrasto}} = -\gamma v.$$

Para obter a força resultante que atua nesse sistema, vamos decompor as forças nas direções radial (perpendicular à trajetória) e tangencial (paralela à trajetória). Na direção do movimento, isto é, na direção tangente à trajetória, atuam a componente da gravidade que tenta restaurar o pêndulo ao equilíbrio e a força de resistência do ar que freia o movimento e, neste caso, podemos escrever,

$$F_R'' = -mg \cdot \sin \theta - \gamma v.$$

A força de arrasto não possui componente radial, pois ela atua paralelamente à velocidade (que é tangencial à trajetória), o módulo dessa componente é dado por,

$$F_R' = T - mg \cdot \cos \theta.$$

De todo modo, a força resultante radial continua sendo responsável pela aceleração centrípeta e, com isso, temos,

$$F_R' = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{L}.$$

Como as componentes radial e tangencial são perpendiculares entre si, aplicamos o Teorema de Pitágoras, teremos,

$$F_R = \sqrt{(F_R')^2 + (F_R'')^2}.$$

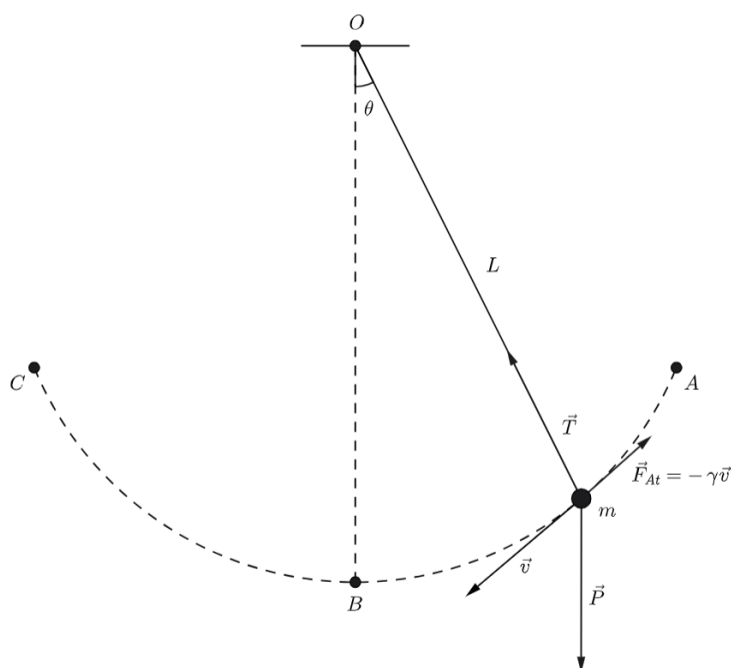
No caso, a componente radial pode ser dada simplesmente pela força centrípeta e, desse modo, a força resultante é,

$$F_R = \sqrt{\left(m \frac{v^2}{L}\right)^2 + (-mg \sin \theta - \gamma v)^2}.$$

Expandindo os termos elevados ao quadrado, temos,

$$F_R = \sqrt{m^2 \frac{v^4}{L^2} + m^2 g^2 \sin^2 \theta + 2mg \cdot \gamma v \sin \theta + \gamma^2 v^2}. \quad (17)$$

Figura 7. Um pêndulo simples sob ação de uma força de arrasto que atua como uma força dissipativa em contraposição à força peso que é conservativa.



Fonte: Autor.

Com a resistência do ar, a força resultante no sistema pendular deixa de ser uma função que depende apenas do ângulo θ e passa a depender também do estado instantâneo da velocidade $\vec{v}$. Se partindo dessa relação, quisermos retornar para a equação da força resultante do caso ideal, devemos, zerar a constante de arrasto, $\gamma = 0$ e, ficamos com,

$$F_R = \sqrt{\left(m \frac{v^2}{L}\right)^2 + m^2 g^2 \sin^2 \theta}.$$

Como estamos considerando o caso ideal, a velocidade tangencial é dada pela relação (14), substituindo-a na expressão da força resultante anterior, tem-se que,

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{(m \cdot 2g \cos \theta)^2 + m^2 g^2 \sin^2 \theta}, \\ &= \sqrt{4 \cdot m^2 g^2 \cos^2 \theta + m^2 g^2 \sin^2 \theta}, \\ F_R &= \sqrt{m^2 g^2 \cdot (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}. \end{aligned}$$

Como m e g são constantes positivas e $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, então, tem-se que,

$$F_R = mg \sqrt{(1 - \cos^2 \theta) + 4 \cos^2 \theta}.$$

E, assim, chegamos a expressão da força resultante ideal,

$$F_R = mg \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Portanto, a equação da força resultante ideal nada mais é do que o caso limite da equação com arrasto quando fazemos o atrito tender a zero, isto é, quando impomos $\gamma \rightarrow 0$ e a conservação da energia mecânica no sistema. Neste sistema, onde consideramos a força de arrasto (resistência do ar), para $\gamma \neq 0$, a variação da energia mecânica no tempo não é constante, porém, podemos determinar o seu valor. Seja E a energia mecânica total do sistema,

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh.$$

Derivando a expressão da energia mecânica, teremos,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + mgh \right).$$

Pela regra da cadeia, a derivada da primeira parcela fica,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{1}{2}m \cdot (2v) \cdot \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dt}.$$

E, portanto, a taxa de variação da energia fica,

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + mg \frac{dh}{dt}.$$

Note que, dv/dt é a aceleração tangencial a_t e a taxa de variação da altura no tempo é a componente vertical da velocidade, ou seja, $v_y = dh/dt$, logo a variação da energia é dada por,

$$\frac{dE}{dt} = mv \cdot a_t + mg \cdot v_y.$$

Como já comentamos anteriormente, na direção tangencial, atuam duas forças, isto é, a componente tangencial do peso e a força de arrasto e, conforme denotamos, a força resultante tangencial é F_R'' , pela Segunda Lei de Newton, temos,

$$ma_t = -mg \sin \theta - \gamma v,$$

$$ma_t + mg \sin \theta = -\gamma v.$$

Voltando a expressão da energia mecânica e substituindo a velocidade vertical $v_y = v \cdot \sin \theta$, temos,

$$\frac{dE}{dt} = mv \cdot a_t + mg \cdot v \cdot \sin \theta,$$

$$\frac{dE}{dt} = v \cdot (ma_t + mg \cdot \sin \theta).$$

Substituindo a relação anterior, obtemos,

$$\frac{dE}{dt} = v \cdot (-\gamma v) = -\gamma v^2.$$

Como a força de arrasto é $F_{arrasto} = -\gamma v$, também podemos escrever a variação da energia,

$$\frac{dE}{dt} = F_{arrasto} \cdot v = -\gamma v^2.$$

Como a força de arrasto é uma força de atrito que surge devido a resistência do ar, vemos que a taxa de variação da energia é sempre menor que zero, $dE/dt < 0$, isso revela o caráter dissipativo da força de arrasto, o que leva o sistema pendular a ter uma energia mecânica que diminui continuamente ao longo do tempo.

4 Solução geral da equação diferencial do pêndulo

Já vimos que a equação geral do pêndulo é dada pela equação diferencial,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \sin \theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (18)$$

Note que esta equação diferencial possui um termo não-linear que é $\sin \theta$, logo, temos uma equação diferencial não-linear de segunda ordem [15]. Na seção 2, usamos uma aproximação para simplificar a equação do pêndulo, porém, como afirmamos lá, a aproximação só é válida quando temos a condição de $\theta \ll 1$, ou seja, para pequenos ângulos, podemos fazer, $\sin \theta \approx \theta$, ao substituirmos esta aproximação na equação do pêndulo, ela se transforma numa equação diferencial linear de segunda ordem que é de fácil solução.

Porém, é também de interesse encontrar a solução geral da equação para o caso não-linear. Todavia, o método de resolução deste tipo de equação não admite funções elementares; é possível encontrar uma função integral para o período do pêndulo e, expressá-la em termos de funções elípticas [16]. Uma tal solução é de grande valor na descrição completa do problema do pêndulo simples, visto que ela descreve o movimento, em geral, para qualquer ângulo. A equação linear aproximada é um caso particular muito restrito. Nesta seção vamos, a partir de agora, procurar uma solução geral para a equação não-linear do pêndulo, para isso, consideramos que o pêndulo esteja sujeito às seguintes condições iniciais,

$$\theta(0) = \theta_0, \quad 0 < \theta_0 < \pi, \quad \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Onde θ_0 é a posição inicial e a velocidade inicial $v(0)$ é nula, portanto, o pêndulo parte do repouso. Para encontrar a solução geral, é necessário resolver a equação não-linear, estamos procurando resolver este problema por métodos analíticos. Há outros caminhos, os procedimentos numéricos e computacionais também oferecem subsídios para se resolver numericamente tais tipos de equações não-lineares. Quando optamos pelo caminho analítico, devemos saber que para este tipo de equação não existe um método geral de solução, como aqueles que conhecemos no estudo das equações diferenciais ordinárias, como o método das variáveis separáveis, método dos coeficientes indeterminados, método da variação dos parâmetros, entre outros.

De fato, as equações diferenciais não lineares, como a do pêndulo simples, frequentemente escapam das técnicas padrão que usamos para resolver equações lineares, isso acontece porque a presença de termos como $\sin \theta$ introduz comportamentos que não podem ser descritos por combinações lineares de funções conhecidas. A solução exata da equação diferencial não-linear do pêndulo simples envolve a transformação da equação, por meio de certas manipulações matemáticas, em uma forma que permita a integração. Ao transformá-la em uma equação integral, a mesma pode ser resolvida apenas pela disposição de funções especiais, como as chamadas **funções elípticas** [16, 17, 18]. Vamos prosseguir com um procedimento para a solução da equação geral do pêndulo simples, na verdade, estamos considerando aqui um problema de valor inicial. Multiplicando a equação (18) por $d\theta/dt$, obtemos,

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

E, deste modo, derivando esta última relação, tem-se,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \omega_0^2 \cos \theta \right] = 0. \quad (20)$$

A equação (20) representa a derivada temporal de uma quantidade que está sendo mantida constante ao longo do tempo. Vamos mostrar que tal relação equivale à conservação da energia mecânica no pêndulo. Já vimos a definição de energia cinética e, podemos reescrever aquela expressão da maneira a seguir,

$$T = \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{m L^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Quanto a energia potencial, podemos reescrevê-la,

$$U = mgL \cdot (1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{U}{mL^2} = \frac{g}{L} \cdot (1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{U}{mL^2} = \omega_0^2 \cdot (1 - \cos \theta).$$

Se somarmos as quantidades, T/mL^2 e U/mL^2 , teremos uma nova energia E' que é um múltiplo da energia mecânica total do pêndulo E , dado que mL^2 é constante,

$$E' = \frac{T}{mL^2} + \frac{U}{mL^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 \cdot (1 - \cos \theta).$$

Se retirarmos da energia E' a quantidade constante ω_0^2 , a energia resultante ainda continua sendo um múltiplo da energia mecânica E ,

$$E'' = E' - \omega_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \omega_0^2 \cdot \cos \theta. \quad (21)$$

E, assim, temos que a equação (20) corresponde de fato à conservação da energia mecânica do sistema, pois sendo E'' um múltiplo de E , então, a derivada temporal, $dE''/dt = 0$, implica a conservação da energia mecânica [16]. Assim, integrando a equação (21) e, usando as condições iniciais dadas em (19), na expressão da energia obtida na última passagem, podemos escrever,

$$E''(0) = \frac{1}{2}(0)^2 - \omega_0^2 \cdot \cos \theta_0 = -\omega_0^2 \cdot \cos \theta_0,$$

$E''(0)$ é a energia inicial do sistema, sendo o sistema conservativo, então, tal quantidade se mantém inalterada em qualquer instante t , com isso, teremos, para um instante t qualquer,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \omega_0^2 \cos \theta = -\omega_0^2 \cos \theta_0.$$

Isolando $\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$, obtemos a relação dada por,

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2 \cdot \omega_0^2 \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Vamos reescrever a equação anterior, pelo uso da identidade trigonométrica $\cos \theta = 1 - 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$, conforme [16], a qual, pode ser facilmente demonstrada pelo uso da identidade do cosseno do ângulo duplo, $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$ e, a expressão anterior fica,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= 2 \cdot \omega_0^2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 + 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right), \\ &= 2 \cdot \omega_0^2 \cdot \left(-2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot \left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (22)$$

Tendo como base a relação outrora obtida e tendo em conta que $\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ é constante, façamos,

$$y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad k = \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right). \quad (23)$$

Por meio das condições iniciais (19) e de (22), podemos escrever,

$$0 = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot \left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

De onde se obtém,

$$y(0) = \sqrt{k}.$$

Por meio da regra da cadeia, podemos obter o valor de $d\theta/dt$ em função de dy/dt e, da relação $y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, podemos escrever o seguinte,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right) \frac{d\theta}{dt}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, tem-se que,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \frac{1}{4} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4} (1 - y^2) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

Isolando $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ em função de $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, teremos o seguinte,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4}{(1 - y^2)} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \quad (24)$$

Voltando a equação (22) e, substituindo (24) nela, bem como, as outras que foram definidas anteriormente, o resultado fica dado por,

$$\frac{4}{(1 - y^2)} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot (k - y^2).$$

E, isolando $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$, nesta última relação, obtemos o que segue,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot (k - y^2) \cdot \frac{(1 - y^2)}{4} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 k \cdot (1 - y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k}\right). \quad (25)$$

Neste ponto, para escrever a equação diferencial de um modo mais conveniente, vamos de acordo com [16], definir novas variáveis, τ e z , para as quais,

$$\tau = \omega_0 t, \quad z = \frac{y}{\sqrt{k}}.$$

Com base nessas novas variáveis, podemos escrever a equação diferencial do pêndulo (25), da maneira dada por,

$$\tau = \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \omega_0 \cdot \frac{dy}{d\tau}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 \cdot \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2.$$

Substituindo na equação diferencial do pêndulo (25), temos que,

$$\omega_0^2 \cdot \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = \omega_0^2 k \cdot (1 - y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k}\right) \rightarrow \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = k \cdot (1 - y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k}\right). \quad (26)$$

Usando a outra variável, $z = y/\sqrt{k}$ e, novamente, pela regra da cadeia,

$$y = \sqrt{k}z \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{d\tau} = \sqrt{k} \frac{dz}{d\tau}.$$

Elevando ao quadrado, tem-se,

$$\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = k \cdot \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2.$$

Substituindo esta última relação na equação (26), obtém-se,

$$k \cdot \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = k \cdot (1 - y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k}\right) \Rightarrow \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = (1 - y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k}\right),$$
$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = (1 - kz^2)(1 - z^2), \quad 0 < k < 1. \quad (27)$$

Esta última equação é a forma final que buscamos encontrar, ela é uma forma muito mais conveniente do ponto de vista matemático de escrever a equação do pêndulo, pois tal equação pode ser reconhecida como a forma padrão da equação diferencial das funções elípticas de Jacobi [16, 17, 18], pelas condições iniciais e, como,

$$z = \frac{\sin \theta/2}{\sin \theta_0/2}.$$

Na condição inicial $t = 0$, isto é, $\theta(0) = \theta_0$, tem-se,

$$z(0) = \frac{\sin \theta(0)/2}{\sin \theta_0/2} = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_0} = 1.$$

Pela regra da cadeia, obtém-se que,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\omega_0} \frac{dz}{dt}.$$

Assumindo as condições iniciais, teremos,

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = \frac{d}{dt}(1) = 0 \Rightarrow \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

A equação diferencial (27) pode ser denominada de equação integral e, vamos resolver para $d\tau$, com isso, tem-se que,

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = (1 - kz^2)(1 - z^2) \Rightarrow \frac{dz}{d\tau} = \pm \sqrt{(1 - kz^2)(1 - z^2)},$$

$$d\tau = \pm \frac{dz}{\sqrt{(1 - kz^2)(1 - z^2)}}.$$

Antes de integrar ambos os membros da equação, devemos levar em conta uma observação, para o pêndulo partindo do ponto mais alto, quando $z = 1$, com velocidade nula $dz/d\tau = 0$ e, iniciando o movimento, ele passa a diminuir o valor de z , ou seja, $dz/d\tau < 0$, e, portanto, a equação que descreve o movimento do pêndulo tem que está no ramo negativo da equação, assim, devemos considerar,

$$d\tau = - \frac{dz}{\sqrt{(1 - kz^2)(1 - z^2)}}.$$

Note que quando $z \rightarrow 1$ temos que $1 - z^2 \rightarrow 0$, deste modo, teremos, então, de acordo com [16, 17, 18], uma integral imprópria dada por,

$$\tau = - \int_1^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k\xi^2)}} \rightarrow \tau = \int_z^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k\xi^2)}}.$$

E, pelas propriedades das integrais,

$$\int_0^1 f(\xi) d\xi = \int_0^z f(\xi) d\xi + \int_z^1 f(\xi) d\xi.$$

Donde segue,

$$\tau = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k\xi^2)}} - \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k\xi^2)}}. \quad (28)$$

Façamos aqui uma rápida revisão sobre as funções elípticas. De acordo com [18], estabelecemos a seguinte definição,

Definição 1. Chama-se *integral elíptica de primeira espécie* a função integral dada por,

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - kt^2)(1 - t^2)}}, \quad 0 < k^2 < 1, \quad (29)$$

onde k é um parâmetro chamado de módulo e $x = \sin \phi$.

Definimos também a amplitude elíptica de Jacobi como $\phi = am(u, k)$, para $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. Podemos fazer uma mudança de variável na integral, $t = \sin \phi$, com $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, e, com isso, colocar a integral incompleta de primeira espécie na sua forma trigonométrica, isto é,

$$u = F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta}}.$$

Uma das funções de Jacobi é a função senoidal elíptica, $sn(u, k)$, e a definimos em termos da amplitude de Jacobi, ou seja, $sn(u, k) = \sin \phi$. A função elíptica de Jacobi $sn(u, k)$ é a solução da equação diferencial de Jacobi,

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2), \quad 0 < k^2 < 1.$$

Note que esta equação é do mesmo tipo que a equação (27). Se escrevermos $y = \sin \phi$, a equação anterior pode ser reescrita em uma nova forma,

$$y(u) = \sin \phi(u) \Rightarrow 1 - y^2 = 1 - \sin^2 \phi = \cos^2 \phi.$$

Pela regra da cadeia, tem-se,

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\sin \phi) = \cos \phi \frac{d\phi}{du} \Rightarrow \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \cos^2 \phi \cdot \left(\frac{d\phi}{du}\right)^2.$$

E, assim, voltando ao lado direito da equação,

$$(1 - y^2)(1 - k^2 y^2) = \cos^2 \phi \cdot (1 - k^2 \sin^2 \phi).$$

Igualando as relações obtidas de ambos os lados, temos,

$$\cos^2 \phi \left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 = \cos^2 \phi (1 - k^2 \sin^2 \phi).$$

Assim, obtemos o que segue,

$$\left(\frac{d\phi}{du}\right)^2 = 1 - k^2 \cdot \sin^2 \phi.$$

Cuja solução é dada por,

$$\phi = \arcsin(sn(u, k)).$$

Quando consideramos $\phi = \pi/2$ e, conseqüentemente, $x = 1$, (pois da definição 1, $x = \sin \phi$), obtemos a integral elíptica completa de primeira espécie em sua forma trigonométrica e algébrica, respectivamente, as quais são dadas, de acordo com [18], pelas relações a seguir,

$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta}}, \quad (30)$$

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}}. \quad (31)$$

Voltando ao nosso problema, sabemos que a equação (28), é certamente do mesmo tipo que as funções elípticas de primeira espécie, ou seja, a equação (31) tem a mesma forma que a primeira parcela de (28) e a equação (30) tem a mesma forma que a segunda parcela de (28). Considerando a segunda parcela de (28), vamos colocá-la em sua forma trigonométrica, por meio de uma mudança de variável, $z = \sin \phi$, desse modo,

$$\int_z^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k\xi^2)}} \Rightarrow F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Deste modo, podemos escrever,

$$\tau = K(k) - F(\phi, k).$$

Se fizermos $x = y/k$, agora estaremos interessados em uma expressão que relacione τ e x , de acordo com [18], que depende de y e que, por sua vez, depende de θ , podemos então escrever, $F(\phi, k) = F(\arcsin x; k)$, outra forma de escrever isto, relacionando z e τ , seria levar em conta a nossa relação anterior, isto é, $z = y/\sqrt{k}$ e, como $k = y/x$, onde $0 < k < 1$, logo o quociente y/x é positivo, deste modo, $z = \sqrt{xy}$,

$$\tau(z) = K(k) - F(\arcsin z; k).$$

E, desta maneira,

$$F(\arcsin z; k) = K(k) - \tau.$$

Para isolar a variável z nesta expressão, usamos aqui a chamada função elíptica de Jacobi, $\text{sn}(u; k)$ que quando aplicada na função $F(\arcsin z; k)$ permite isolar a variável z de acordo com [16, 18], assim, temos que,

$$z = \text{sn}(K(k) - \tau, k).$$

É útil agora retornar as variáveis originais do problema, pois a introdução das variáveis z, x, k, τ foi para tornar a escrita da equação diferencial de uma maneira mais cômoda. E, devido ao fato de a equação diferencial geral do pêndulo não ter solução baseada em métodos mais ordinários, a troca de variáveis tornou-se um elemento que ajudou a escrever a equação em sua forma integral, disso, fomos levados às funções elípticas de Jacobi.

Então, lembrando das relações que especificam y, z, k, τ , teremos,

$$\frac{y}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2}}} = \text{sn} \left(K \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) - \omega_0 t; \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right).$$

E, substituindo y , obtemos,

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \text{sn} \left(K \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) - \omega_0 t; \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right). \quad (32)$$

E, para obter a resposta em função da posição angular do pêndulo em um instante t qualquer do seu movimento, basta que,

$$\arcsin \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) = \arcsin \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \text{sn} \left[K \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) - \omega_0 t; \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right] \right).$$

De forma que,

$$\theta(t) = 2 \cdot \arcsin \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{sn} \left[K \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) - \omega_0 t; \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right] \right). \quad (33)$$

Finalmente, estamos com a solução exata da equação do movimento do pêndulo simples para quaisquer ângulos e, não estamos mais restritos à aquela aproximação $\sin \theta \approx \theta$. Conforme vimos, na seção 2, a solução da equação diferencial linear (assumida para ângulos pequenos) depende do cosseno de ωt e, da amplitude A de oscilação $\theta(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$. Pelas nossas condições iniciais dadas em (19), sabemos que $\theta(0) = \theta_0$, de fato, $\theta(0) = \theta_0 \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \phi) \Rightarrow \theta_0 = \theta_0 \cdot \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = 1$ e, logo, temos que $\phi = 0$, portanto, a condição $\theta(0) = \theta_0$ implica em $\phi = 0$.

Supondo a situação em que temos $\theta_0 \approx 0$, devemos levar em conta que $\arcsin \theta_0 \approx \theta_0$, outra aproximação é para $k = \sin^2(\theta_0/2) \approx (\theta_0/2)^2$ e, disso, se estamos assumindo que $\theta_0 \approx 0$, logo $k \approx 0$ e, como,

$$K(0) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 0 \cdot \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Logo, para pequenos ângulos podemos aproximar $K(k) \approx \pi/2$, considerando uma propriedade das funções elípticas, isto é, $\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u$, então, uma outra aproximação que podemos tomar nesta situação é $\operatorname{sn}(u, k) \approx \sin u$ para $k \approx 0$. Com base nessas aproximações, decorrentes da condição de ângulos pequenos, podemos simplificar a solução geral do pêndulo simples,

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \rightarrow K(k) - \omega t \approx \frac{\pi}{2} - \omega t.$$

Dessa última passagem, somos levados a estabelecer,

$$\operatorname{sn}(K(k) - \omega t, k) \approx \sin \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right) = \cos \omega t.$$

Dessa forma, a relação (33), fica dada por,

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 2 \cdot \arcsin \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos \omega t \right), \\ \theta(t) &= 2 \cdot \arcsin \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos \omega t \right) \approx 2 \cdot \sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos \omega t. \end{aligned}$$

E, da aproximação $\sin \theta_0/2 \approx \theta_0/2$, ficamos com,

$$\theta(t) \approx 2 \cdot \frac{\theta_0}{2} \cdot \cos \omega t \rightarrow \theta(t) \approx \theta_0 \cdot \cos \omega t$$

De onde notamos que esta função da posição $\theta(t)$ é equivalente a expressão que encontramos em (3), neste caso, só houve uma readequação do ângulo de fase, $\phi = 0$, em decorrência das condições iniciais, pois deduzimos a expressão geral (33), baseado nas condições de (19). De forma que vemos a validade da relação (33), pois ela se reduz à expressão (3), quando tomamos a condição de ângulos pequenos $\theta_0 \approx 0$.

Sobre o período de oscilação do pêndulo, considerando esta situação mais geral, de acordo com [16, 17], o período de oscilação T é quatro vezes o tempo que o pêndulo leva para oscilar de $\theta = 0$ ($z = 0$) à $\theta = \theta_0$ ($z = 1$). Isso porque, suponha o pêndulo partindo da posição mais alta (θ_0) à direita, em seu movimento completo ele desce até a posição vertical $\theta = 0$, na posição de equilíbrio, depois sobe até o mesmo ângulo máximo à esquerda $-\theta_0$, em seguida, retorna ao ponto de equilíbrio onde $\theta = 0$, e, finalmente, volta à posição inicial $\theta = \theta_0$ e, contando, cada um desses estágios, temos que, isto confirma a afirmação anterior.

Com base nas substituições de variáveis que fizemos, isto é, $\tau = \omega_0 t$, temos que, $t = \tau/\omega_0$, disso, então, o tempo t que o pêndulo leva para ir da posição máxima θ_0 até a posição de equilíbrio $\theta = 0$ é $t(0) = \tau(0)/\omega_0$, logo o período total é,

$$T = 4 \cdot t(0) = 4 \cdot \frac{1}{\omega_0} \tau(0) = \frac{4}{\omega_0} \cdot K(k).$$

Onde já sabemos que,

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}.$$

Ou em sua forma trigonométrica,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta}}.$$

Como ω_0 está associado ao período do pêndulo T_0 , quando este se comporta como um oscilador harmônico simples, e se,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0},$$

$$T = \frac{4}{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)} K(k) = \frac{2}{\pi} T_0 \cdot K(k).$$

E, logo, temos que o período T do pêndulo é dado por,

$$T = \frac{2}{\pi} T_0 \cdot K(k). \quad (34)$$

Como $K(k)$ é uma função integral, não podemos dizer que determinamos exatamente o período do pêndulo simples, pois a integral não está resolvida. Vamos, por meio de séries de potências, tentar expressar uma solução exata para o período do pêndulo. Podemos escrever a função,

$$f(\theta, k) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta}} = (1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta)^{-1/2}.$$

Podemos expandir esta expressão em série, usando o teorema do binômio de Newton. Considerando a expansão binomial da maneira dada por,

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots, \quad x < 1.$$

Assumindo a função $f(\theta, k)$, podemos tomar $x = k^2 \cdot \sin^2 \theta$ e $n = -1/2$, de forma que,

$$(1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-k^2 \cdot \sin^2 \theta) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) (-k^2 \cdot \sin^2 \theta)^2 + \dots$$

Simplificando esta expressão, obtemos,

$$(1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \cdot \sin^2 \theta + \frac{3}{8} k^4 \cdot \sin^4 \theta + \dots$$

Agora substituindo a função $f(\theta, k)$ na expressão $K(k)$, tem-se,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \cdot \sin^2 \theta + \frac{3}{8} k^4 \cdot \sin^4 \theta + \dots \right) d\theta.$$

Como é fácil verificar, as integrais definidas,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{16}, \quad \dots$$

E, deste modo, ficamos com,

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right).$$

Esta é a série de potências para a função $K(k)$ e, assim, podemos escrever que o período do pêndulo fica determinado por,

$$T = \frac{2}{\pi} T_0 \cdot \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right).$$

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right).$$

Mas, por definição, $k = \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right)$, substituindo na expressão, teremos,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^8 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right). \quad (35)$$

E, finalmente chegamos a expressão geral para o período do pêndulo simples, em função do ângulo inicial θ_0 , se tomarmos o limite desta expressão para $\theta_0 \rightarrow 0$, teremos que,

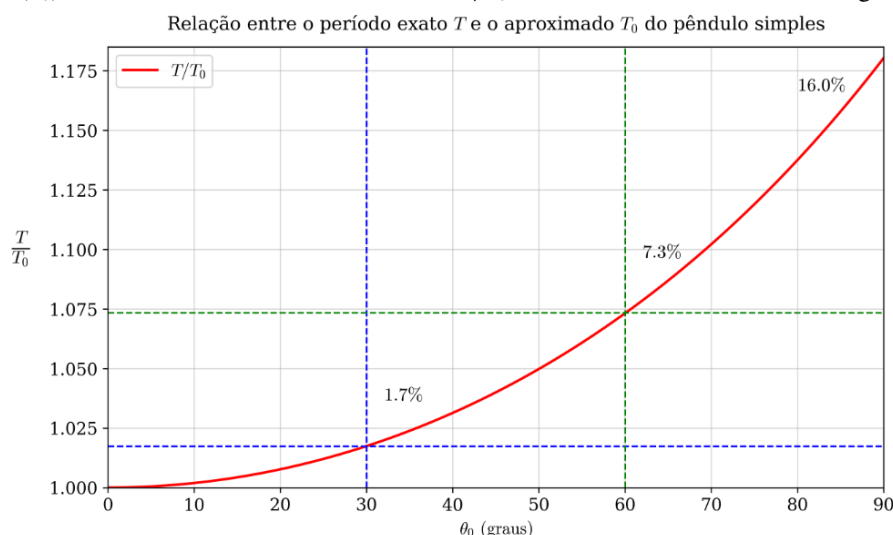
$$\lim_{\theta_0 \rightarrow 0} T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

O que mostra que a expressão geral do período tende para aquela relação que obtivemos quando estava sendo considerado as pequenas oscilações do pêndulo, ou seja, aquela aproximação $\theta \approx 0$ é realmente apropriada para aproximar o período do pêndulo simples. Uma outra aproximação para o período T , um tanto melhor do que a aproximação linear, pode ser dada por,

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right).$$

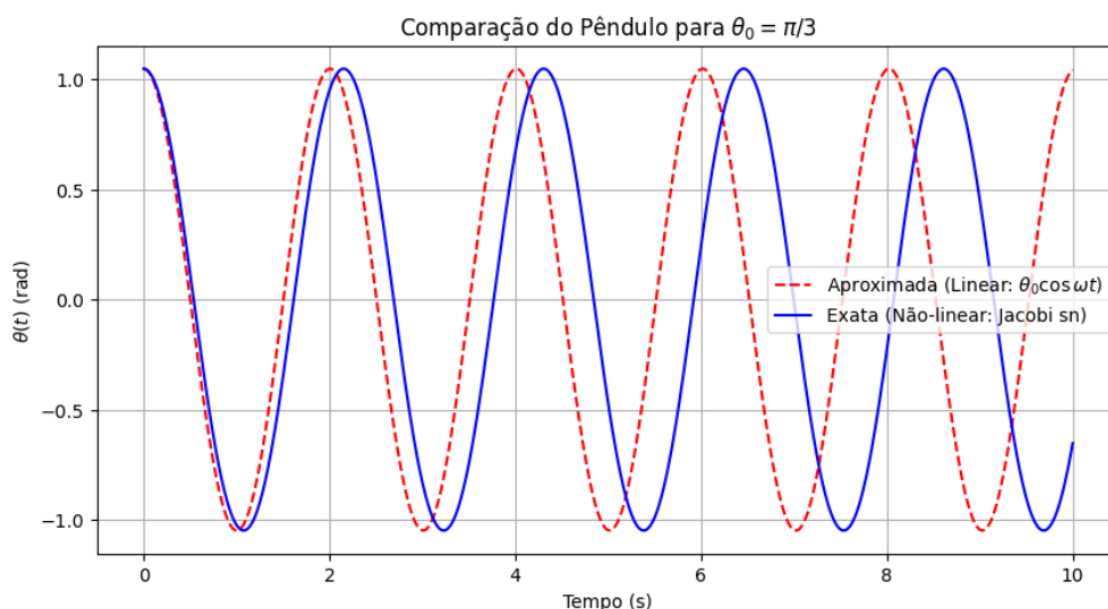
Vamos a seguir esboçar um gráfico para mostrar o quanto a aproximação T_0 é boa em comparação com o período geral T .

Figura 8. Comparação entre o período geral de um pêndulo simples (T) com a sua aproximação linear (T_0), no eixo vertical encontra-se a razão T/T_0 e no eixo horizontal temos os ângulos θ .



Fonte: autor.

Figura 9. Gráfico comparando a posição $\theta(t)$ considerando a equação (33) que é a solução exata (resultante da equação diferencial não-linear) e a solução aproximada que é $\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos \omega t$, e o ângulo de partida é $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$.



Fonte: autor.

O gráfico da figura 8 é uma estimativa gráfica do quanto a solução exata do período pêndulo simples T diverge da solução aproximada T_0 , no eixo horizontal encontramos o ângulo de um pêndulo simples de 0° à 90° e, no eixo vertical, encontramos os valores de T/T_0 , ou seja, a razão entre o

período exato T e o período aproximado T_0 . A curva vermelha representa justamente a razão entre os valores de T dados por meio da equação (35) e os valores de T_0 , ou seja, a curva vermelha representa o gráfico da função T/T_0 e, tal função pode ser obtida simplesmente dividindo a relação (35) pela expressão de $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$, de onde obtém-se que,

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots$$

Para amplitudes baixas ($\theta_0 \leq 15^\circ$), a razão T/T_0 permanece extremamente próxima de 1.000, apresentando um desvio inferior a 0,5%, isso torna o uso da aproximação linear uma boa estimativa para a maioria das aplicações práticas. Do mesmo modo, se considerarmos um ângulo de 30° , a razão atinge $T/T_0 \approx 1,017$, o que representa um desvio de apenas 1,7%, trata-se de um erro ainda bastante tolerável na maioria dos experimentos práticos. Ao elevar a amplitude para 60° , a razão sobe para 1,073, indicando que o período real é 7,3% maior do que o calculado por T_0 , a partir deste ponto, vemos que a aproximação linear deixa de ser adequada para análises de precisão, em experimentos com pêndulos simples. No limite da oscilação pendular, com o pêndulo abandonado da horizontal a um ângulo de aproximadamente 84° , a razão chega a 1,160, o período exato é 16,0% superior ao valor previsto pela aproximação linear do pêndulo simples, o que mostra o quanto a aproximação se deteriora para ângulos grandes.

Uma outra aproximação que podemos usar para calcular o período do pêndulo simples, em vez de se utilizar a série de potências (35), mas que, no entanto, seria uma aproximação melhor do que a aproximação linear é,

$$\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{\theta_0^2}{16}.$$

Já vimos a expressão exata para a razão entre o período real T e o período aproximado T_0 ; quando o ângulo θ_0 não é extremamente grande (por exemplo, até 30° ou 40°), podemos usar a expansão em série de Taylor para a função seno em torno de zero, isto é, $\sin(\theta) \approx \theta$, portanto, $\sin(\theta_0/2) \approx \theta_0/2$, elevando ao quadrado, $\sin^2 \theta_0/2 \approx (\theta_0/2)^2 = \theta_0^2/4$.

Considerando o termo $\sin^2 \theta_0/2$ na série infinita do período T , assumindo apenas o primeiro termo de correção (desprezando as potências de quarta ordem e superiores, por serem valores muito pequenos), teremos,

$$\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot \left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right],$$

Substituindo $\sin^2 \theta_0/2 = \theta_0^2/4$,

$$\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\theta_0^2}{4} \right) = 1 + \frac{\theta_0^2}{16}.$$

Vamos testar a precisão da fórmula deduzida e, para tanto, utilizaremos $\theta_0 = 60^\circ$ como ângulo de referência. Este ângulo em radianos fica,

$$\theta_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \approx 1,0472 \text{ rad}.$$

Substituindo na fórmula de aproximação, temos,

$$\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{(1,0472)^2}{16} = 1 + \frac{1,0966}{16} \approx 1 + 0,0685 = 1,0685.$$

O resultado da aproximação dá uma razão de 1,0685 (um desvio de aproximadamente 6,85%), valor que é inferior aos 7,3% mostrado pelo gráfico, portanto, esta fórmula de correção de segunda ordem tem, por assim dizer, uma boa precisão em comparação com a aproximação linear T_0 .

Em relação ao gráfico da figura 9, sabemos que a curva vermelha tracejada representa a solução aproximada linear para o período do pêndulo em função do tempo para o ângulo delimitado, já a curva azul contínua representa a solução exata não-linear para o pêndulo. O ângulo escolhido a priori para a análise gráfica foi $\theta_0 = \pi/3$, no instante inicial, $t = 0$, ambas as curvas partem juntas de $\theta_0 = \pi/3 \approx 1,047$ rad, no instante, $t \approx 2$ s, a curva azul já atinge o pico ligeiramente depois da curva vermelha. Conforme o tempo passa, esse pequeno atraso em cada estágio do movimento do pêndulo vai se acumulando. Por volta de $t = 10$ s, a solução linear (vermelha) e a solução exata (azul) estão quase em oposição de fase.

Em relação a série de potência do período exato T do pêndulo simples, já vimos que a fórmula do período é dada por,

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \left(1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta\right)^{-1/2} d\theta.$$

Vamos escrever essa expressão de uma outra maneira, objetivando escrever uma fórmula do termo geral para o teorema do binômio de Newton. Se tomarmos a expansão de $(1 - x)^{-1/2}$, para $x = k^2 \cdot \sin^2 \theta$, teremos que,

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots + C_n x^n + \dots$$

Vamos analisar o coeficiente do termo de x^n , note que o padrão dos termos dessa expansão é tal que o numerador dos coeficientes é um produto de números ímpares e o denominador desses coeficientes é o produto de números pares, então, podemos escrever,

$$C_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

Vamos reescrever C_n de uma forma um tanto mais conveniente, o denominador que é um produto de fatores pares, pode ser dado por,

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdots (2 \cdot n) = (2 \cdot 2 \cdots 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdots n) = 2^n \cdot n!$$

Para o numerador que é o produto dos fatores ímpares, vamos simplesmente multiplicar e dividir pelo produto dos números pares $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$, de forma que teremos o que segue,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2n - 1) \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

E, com isso, podemos escrever C_n da forma a seguir,

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Com isso, a expansão binomial fica,

$$(1 - x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right] x^n.$$

Substituindo $x = k^2 \cdot \sin^2 \theta$ na relação anterior, tem-se,

$$(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right] k^{2n} \cdot \sin^{2n} \theta.$$

Substituindo $(1 - k^2 \cdot \sin^2 \theta)$, na integral do período, temos que,

$$T = \frac{2}{\pi} \cdot T_0 \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right] k^{2n} \sin^{2n} \theta \right) d\theta.$$

Como sabemos a série que estamos integrando é dada pela função,

$$f(\theta) = C_n k^{2n} \cdot \sin^{2n} \theta.$$

Onde $C_n = (2n)!/2^{2n}(n!)^2$ é a sequência de coeficientes binomiais e $k = \sin \theta_0/2$. Vamos aplicar o teste M de Weierstrass para provar que a série de funções $\sum f(\theta)$ é uniformemente convergente em um intervalo determinado, para tanto, precisamos encontrar uma sequência de constantes M_n tal que, i) $|f(\theta)| \leq M_n$ para todo θ no intervalo $[0, \pi/2]$; ii) A série numérica $\sum M_n$ seja convergente. Analisando a função no intervalo $\theta \in [0, \pi/2]$, temos que, o termo do seno é limitado, pois $0 \leq \sin \theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^{2n} \theta \leq 1$. Como $C_n > 0$ e $k > 0$, o valor máximo de $f(\theta)$ ocorre quando $\sin \theta = 1$, nestas condições,

$$|f(\theta)| = C_n \cdot k^{2n} \sin^{2n} \theta \leq C_n k^{2n} \cdot (1) = M_n.$$

Portanto, definimos $M_n = C_n k^{2n}$ e também, notemos que a série numérica $\sum M_n = \sum C_n k^{2n}$ é justamente a expansão binomial de $(1 - k^2)^{-1/2}$. Para qualquer amplitude do ângulo inicial $\theta_0 < \pi/2$, temos $k = \sin(\theta_0/2) < 1$. Logo, $k^2 < 1$, o que garante que a série numérica $\sum M_n$ converge absolutamente para o valor finito $1/\sqrt{1 - k^2}$. Pelo Teste M de Weierstrass, como $|f_n(\theta)| \leq M_n$ e $\sum M_n$ não diverge, com isso, concluímos que a série de funções $\sum f(\theta)$ converge absolutamente e uniformemente no intervalo $[0, \pi/2]$. Assim, pela convergência uniforme da série, podemos escrever o que segue,

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(\theta) \right) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi/2} f(\theta) d\theta \right).$$

Voltando a expressão do período T do pêndulo,

$$T = \frac{2}{\pi} \cdot T_0 \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right] k^{2n} \sin^{2n} \theta \right) d\theta.$$

Como a série é uniformemente convergente no intervalo de integração, podemos inverter a ordem da soma e da integral e, com isso, ficamos,

$$T = \frac{2}{\pi} \cdot T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right] k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta.$$

Observe que a integral é de um tipo especial bem conhecido, isto é, se trata da **integral de Wallis** para potências pares do seno e esta integral possui um resultado bem conhecido, a saber,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right].$$

Substituindo este resultado da integral de Wallis na expressão do período, obtemos,

$$T = \frac{2}{\pi} \cdot T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right] k^{2n} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right] \right).$$

Simplificando $2/\pi$ com $\pi/2$, teremos,

$$T = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 k^{2n}.$$

Onde o termo geral a_n é definido por,

$$a_n = \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 k^{2n}, \quad \text{com } k = \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right).$$

Vamos usar o teste da razão para estudar a convergência. Para obter a_{n+1} , substituímos n por $n+1$ na fórmula de a_n , neste caso, temos,

$$a_{n+1} = \left[\frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \right]^2 k^{2(n+1)} = \left[\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \right]^2 k^{2n+2}.$$

Agora, calculamos a razão $|a_{n+1}/a_n|$ e, ficamos com,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\left[\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \right]^2 k^{2n+2}}{\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 k^{2n}}.$$

Simplificando a expressão, teremos,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left[\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \right]^2 \cdot \frac{k^{2n+2}}{k^{2n}}.$$

Podemos ainda simplificar mais alguns termos dessa última expressão,

$$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)! \Rightarrow \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = (2n+2)(2n+1).$$

Assim como,

$$(n+1)! = (n+1)n! \Rightarrow \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \left[\frac{n!}{(n+1)!} \right]^2 = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Logo, podemos escrever,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \right]^2 \cdot k^2,$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left[\frac{2(n+1)(2n+1)}{4(n+1)^2} \right]^2 \cdot k^2 = \left[\frac{2n+1}{2(n+1)} \right]^2 \cdot k^2 = \left[\frac{2n+1}{2n+2} \right]^2 \cdot k^2.$$

Agora aplicamos o limite sobre n , isto é, para $n \rightarrow \infty$ e, assim, temos,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n+1}{2n+2} \right]^2 \cdot k^2.$$

$$L = k^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{2}{n}} \right)^2 = k^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} \right)^2.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (2/n) = 0$, temos,

$$L = k^2 \cdot \left(\frac{2+0}{2+0} \right)^2 = k^2 \cdot (1)^2 = k^2.$$

Pelo Teste de d'Alembert também conhecido como teste da razão, sabemos de acordo com [19] que a série $\sum a_n$, converge absolutamente se $L < 1$; diverge se $L > 1$; e é inconclusiva se $L = 1$. Vejamos, como $L = k^2$, logo, a condição para a convergência absoluta é,

$$k^2 < 1 \Rightarrow \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) < 1 \Rightarrow \left| \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right| < 1.$$

Como o valor absoluto do seno de qualquer ângulo só atinge 1 em valores múltiplos ímpares de $\pi/2$, logo, temos que,

$$\left| \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{\theta_0}{2} \neq \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta_0 \neq \pm \pi.$$

Portanto, a série converge de forma absoluta e uniforme para o intervalo onde θ_0 é definido, isto é, $0 < \theta_0 < \pi$. Se escrevermos a série em questão, explicitamente, temos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta_0) = 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{25}{256} \sin^6 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots$$

A soma infinita dessa série resulta ou converge para o valor,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta_0) = \frac{2}{\pi} K \left(\sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right).$$

Logo, o período exato T converge para o valor encontrado anteriormente,

$$T = T_0 \cdot \left[\frac{2}{\pi} K(k) \right].$$

E, assim, concluímos que a série do período $a_n(\theta)$ converge absolutamente e uniformemente para o valor $2/\pi \cdot K(k)$, onde $K(k)$ representa a Integral Elíptica de Primeira Espécie.

5 Solução exata para a velocidade inicial diferente de zero

Na seção anterior, usamos como uma das condições iniciais para o problema do movimento do pêndulo que a velocidade inicial era zero. Agora, vamos continuar o nosso estudo sobre a solução exata para a equação do pêndulo, admitindo agora que a velocidade inicial v_0 não é mais zero, isto é, $v_0 \neq 0$, mas o problema de valor inicial é essencialmente o mesmo daquele que tratamos na seção anterior. Vamos considerar de acordo com [18], que a conservação da energia mecânica total do sistema pendular seja,

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \omega_0^2 \cdot (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}v_0^2. \quad (36)$$

Agora vamos assumir de acordo com [18] que quando a velocidade é nula, o ângulo é máximo, isto é, se $v = 0$ então $\theta = \theta_{max}$, com base nesta suposição, podemos escrever,

$$E = \omega_0^2 \cdot (1 - \cos \theta_{max}).$$

Como o sistema é conservativo, podemos igualar a energia total em ambos os casos e, deste modo, tem-se,

$$\frac{1}{2}v^2 + \omega_0^2 \cdot (1 - \cos \theta) = \omega_0^2(1 - \cos \theta_{max}).$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2 \cdot (\cos \theta - \cos \theta_{max}).$$

Com base na identidade trigonométrica,

$$2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos \theta.$$

Podemos reescrever a expressão anterior da maneira a seguir,

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

E, com isso, teremos,

$$\omega_0 \cdot t = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Com alguma manipulação algébrica, ficamos com,

$$u = \frac{1}{2k} \int_0^\theta \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}. \quad (37)$$

Sendo consideradas as substituições,

$$u = \omega_0 \cdot t, \quad k = \sin\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right).$$

A integral (37) pode ser reescrita como uma integral elíptica do primeiro tipo, para isso, consideremos novas substituições de variáveis de acordo com [18],

$$x = \frac{1}{k} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow dx = \frac{1}{2k} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha.$$

Usando a identidade trigonométrica, $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$, considerando apenas o sinal positivo da raiz para os fins do problema que estamos estudando, escrevemos,

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Fazendo uso desta última relação em conjunto com $x = \frac{1}{k} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, pode-se reescrever dx de uma forma um tanto mais conveniente,

$$dx = \frac{1}{2k} \cdot \sqrt{1 - k^2 x^2} d\alpha.$$

Tal relação podendo ser reescrita,

$$d\alpha = \frac{2k}{\sqrt{1 - k^2 x^2}} dx. \quad (38)$$

E, deste modo, substituindo (38) na integral (37), ficamos com,

$$u = \frac{1}{2k} \int_0^z \frac{2k dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2} \sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Onde assumimos que z é o limite superior de x quando $\alpha = \theta$, de outro modo, $z = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e, como sabemos, da forma como a função integral u foi descrita ela é a forma padrão de uma integral elíptica, ou seja,

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = F(\arcsin z, k^2).$$

De acordo com [18], tomando a inversa da função $F(\arcsin z, k^2)$,

$$\arcsin z = \text{am}(u; k^2).$$

De onde ficamos com,

$$z = \text{sn}(\text{am}(u; k^2)) \rightarrow z = \text{sn}\left(\omega_0 t; \sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right)\right).$$

Lembrando, como definimos anteriormente, $z = \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, para algum θ , e com isso, obtemos,

$$\frac{1}{k} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{sn}\left(\omega_0 t; \sin^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)\right).$$

E, por fim, escrevemos,

$$\theta(t) = 2 \cdot \arcsin\left[\sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \cdot \operatorname{sn}\left(\omega_0 t; \sin^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)\right)\right]. \quad (39)$$

Com isso, chegamos a uma relação geral para a função da posição angular do pêndulo simples, tendo assumido como uma de suas condições iniciais que a velocidade é diferente de zero, observe, por fim, que $k = \sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)$.

6 Considerações finais

Neste trabalho, buscamos apresentar os principais elementos teóricos a respeito da teoria matemática do pêndulo simples, foi feita uma breve descrição histórica a respeito do dispositivo, porém, não foi a nossa pretensão fazer um estudo histórico detalhado a respeito dos pêndulos, mas acreditamos que a introdução histórica neste texto já serve para os fins deste trabalho. Objetivamos apresentar neste artigo um tratamento o mais geral possível para o movimento do pêndulo simples e a sua dinâmica. Nos livros-texto clássicos de física, principalmente, em nível de graduação mais elementares, como [7, 8, 11], mas também alguns mais avançados como aqueles de mecânica clássica [19] não tratam do assunto; por exemplo, encontramos uma descrição do pêndulo simples, onde geralmente se busca determinar a equação diferencial do pêndulo, a qual, descreve o seu movimento e também seu período T , porém, tais referências determinam a solução por uma aproximação para ângulos pequenos. Vamos encontrar soluções mais generalizadas como a que apresentamos nesse texto, em livros avançados, como aqueles que abordam a mecânica analítica [21, 22, 23].

Tal tratamento usando aproximações é útil em muitas situações que envolve este instrumento, pois como sabemos o isocronismo é uma das propriedades mais importantes dos pêndulos simples, mas esta propriedade só é válida quando a aproximação $\sin \theta \approx \theta$ vigora. O leitor deste artigo deve ter notado que a solução analítica da equação exigiu o emprego de um certo tipo de função dita não-elementar, isto é, as funções elípticas, um tipo de função que envolve o cálculo superior. A solução geral que encontramos neste trabalho é muito importante, visto que resolver o problema de valor inicial envolvendo a equação diferencial do pêndulo simples com o uso da aproximação não é satisfatório em todos os casos, vimos pelo gráfico, o quanto essa aproximação vai se deteriorando a medida que o ângulo θ vai aumentando num intervalo de $0 < \theta_0 < \pi/2$.

Portanto, faz-se necessário ter em mãos a solução geral para o problema, considerando qualquer ângulo θ , isso não só do ponto de vista matemático, mas também do ponto de vista da física, pois apesar da aproximação $\sin \theta \approx \theta$ ser muito mais usual nas diversas aplicações dos pêndulos, é sempre útil ter a disposição a solução geral que descreve precisamente todas as eventuais situações envolvendo o sistema físico em estudo. Usamos também séries de potências para escrever uma expressão geral para o período do pêndulo, conseguimos mostrar que o período T do pêndulo simples depende do período T_0 obtido da aproximação linear e de uma série das potências dos senos do ângulo de partida do pêndulo θ_0 , fizemos também um estudo da convergência da série infinita do período T , mostrando que a solução da série pela função $K(k)$ de fato corresponde a soma da série no intervalo de convergência do problema de valor inicial. Além disso, foi procurado resolver dois tipos de problemas de valor inicial, aquele em que o pêndulo parte de uma posição inicial com



ângulo de lançamento igual a θ_0 e num dos problemas consideramos que a velocidade inicial v_0 era zero, isto é, $v_0 = 0$ e no outro que $v_0 \neq 0$.

7 Referências

- [1] NEWTON, R. G. **Galileo's pendulum**: from the rhythm of time to the making of matter. Massachusetts: Harvard University Press, 2005.
- [2] ARIOTTI, P. E. Aspects of the Conception and Development of the Pendulum in the 17th Century. **Archive for History of Exact Sciences**, [s. l.], v. 8, n. 5, p. 329-410, 1972.
- [3] NEEDHAM, J. **Science and civilisation in China**: physics and physical technology: Mechanical engineering. Cambridge: Cambridge University Press, 1965. v. 4
- [4] MENDES, G. I; BATISTA, I. L. Síntese histórica da matematização do pêndulo simples. ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2014, Campo Mourão. Anais [...]. Campo Mourão: SBEMPR, 2014. p. 45-66.
- [5] DRAKE, S. **Galileu**. Tradução de Maria Manuela Pecegueiro. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1981.
- [6] CAPARICA, A. O isocronismo dos triângulos retângulos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 29, n. 3, p. 389-392, 2007.
- [7] YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. **Sears and Zemansky física II**: termodinâmica e ondas. 14. ed. São Paulo: Pearson Education, 2015.
- [8] HALLIDAY, D. RESNICK, J. W. **Fundamentos de Física**, v. 2: gravitação, ondas e termodinâmica. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [9] BIGOTTI, F.; TAYLOR, D. The Pulsilogium of Santorio: new light on tecnology and measurament in early modern medicine. **Societati si Politica**, Arad, v. 11, n. 2, p. 53-113, November 2017.
- [10] SANTORIO Santorio. In: WIKIPEDIA: a enciclopédia livre. [San Francisco, CA: Wikimedia Foundation, 2024]. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/SantorioSantorio#/media/Ficheiro:Sanctorius.jpg>. Acesso em: 1 jun. 2025.
- [11] HALLIDAY, D. RESNICK, J. W. **Fundamentos de Física**, v. 1: mecânica. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [12] OLIVEIRA, E. F. **Estudo do período do pêndulo simples dependente da amplitude de oscilação**. 2020. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Escola de Ciências Exatas e da Computação, Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2020.
- [13] BOAS, M. L. **Matemática para Física e Engenharia**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- [14] STEWART, J. **Cálculo**: volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [15] BOYCE, W. E. DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

- [16] BELENDEZ, A. *et al.* Exact solution for the nonlinear pendulum. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 29, n. 4, p. 645-648, 2007.
- [17] OLIVEIRA, J. *et al.* Solução Teórica para o Período do Pêndulo Simples Não Linear e Aferição Experimental Utilizando o Arduino. **Revista Brasileira de Física**, São Paulo, v. 4, n. 3, nov. 2024.
- [18] GONÇALVES, B. J. **Funções Elípticas e suas Aplicações na Física Matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.
- [19] STEWART, J. **Cálculo**: volume 2. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [20] TAYLOR, J. R. **Mecânica clássica**. Tradução de Gabriele Corniani. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- [21] MARION, J. B.; THORNTON, S. T. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. Tradução de Maria Alice Gomes da Costa. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- [22] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. L. **Mecânica clássica**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.
- [23] LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.