Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 27, 2026
Artigo de Pesquisa

Condições analíticas de existência para triângulos retângulos: uma abordagem isoperimétrica

Analytical conditions of existence for right triangles: an isoperimetric approach

Luiz Henrique Pazine Cardeliquio
Universidade Estadual Paulista (Unesp), São José do Rio Preto, luiz.cardeliquio@unesp.br

Resumo

Este artigo investiga a reconstrução morfológica de triângulos retângulos a partir exclusivamente da sua área (A) e perímetro (p). Uma modelação algébrica baseada no Teorema de Pitágoras gera um sistema paramétrico que define as medidas dos lados. A análise do discriminante revela que a condição de existência impõe uma restrição a uma razão isoperimétrica ($K = p^2/A$). Demonstra-se que o limite isoperimétrico desloca-se da fronteira universal $12\sqrt{3}$ para a restrição estrita $K \geq 12 + 8\sqrt{2}$, correspondente ao triângulo retângulo isósceles. O espaço paramétrico é particionado, mapeando visualmente as regiões de viabilidade geométrica e de existência de configurações retangulares. Adicionalmente, o modelo é aplicado à Teoria dos Números, definindo critérios de divisibilidade para a formação de ternos pitagóricos.

Palavras-chave: triângulo retângulo; quociente isoperimétrico; modelação algébrica; ternos pitagóricos.

Abstract

This article investigates the morphological reconstruction of right triangles exclusively from their area (A) and perimeter (p). An algebraic modeling approach based on the Pythagorean Theorem generates a parametric system that determines the side lengths. Discriminant analysis reveals that the existence condition imposes a restriction on an isoperimetric ratio ($K = p^2/A$). It is shown that the isoperimetric limit shifts from the universal boundary $12\sqrt{3}$ to the stricter restriction $K \geq 12 + 8\sqrt{2}$, corresponding to the isosceles right triangle. The parametric space is partitioned, visually mapping the regions of geometric feasibility and the existence of right triangle configurations. Additionally, the model is applied to Number Theory, establishing divisibility criteria for the formation of Pythagorean triples.

Keywords: right triangle; isoperimetric quotient; algebraic modeling; Pythagorean triples.

Artigo recebido em mar. 2026 e aceito em set. 2026

Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.

1 Introdução

Apesar da existência dessas restrições globais, raramente se discute na literatura didática a reconstrução de triângulos a partir de parâmetros puramente escalares, como área e perímetro. O presente trabalho investiga as condições analíticas necessárias para a existência de triângulos retângulos quando apenas a área e o perímetro são conhecidos. Mais especificamente, buscamos determinar sob quais relações entre essas duas grandezas é possível reconstruir as medidas dos lados do triângulo e garantir a viabilidade geométrica da figura no plano euclidiano.

Trabalhos recentes, como os desenvolvidos por Cardeliquio [1, 2], apontaram para a viabilidade de encontrar os lados de triângulos retângulos e isósceles operando apenas os parâmetros de área e perímetro. Um problema diretamente relacionado foi investigado por Dobbs [3], que estudou a existência de triângulos euclidianos com área e perímetro prescritos. No caso particular dos triângulos retângulos, o autor estabeleceu uma condição necessária e suficiente para a existência da figura, recorrendo à semelhança de triângulos e ao cálculo diferencial. Sua condição é equivalente à fronteira $K \geq 12 + 8\sqrt{2}$ considerada neste trabalho. A abordagem aqui desenvolvida, contudo, parte diretamente da determinação dos lados em função de p e A e obtém essa condição por meio da análise do discriminante da equação associada aos catetos.

A contribuição deste artigo consiste em desenvolver uma formulação algébrica direta para a reconstrução de triângulos retângulos a partir exclusivamente de seu perímetro total p e de sua área A. Ao introduzir a parametrização pela constante $K = p^2/A$, obtém-se uma caracterização explícita da região viável no plano paramétrico, relacionando a análise do discriminante às fronteiras isoperimétricas correspondentes.

Além disso, estabelece-se a relação entre essa condição e a desigualdade isoperimétrica clássica para triângulos, evidenciando que o caso limite corresponde ao triângulo equilátero. Dessa forma, o trabalho fornece uma descrição unificada que articula métodos algébricos e resultados geométricos clássicos.

A principal contribuição deste estudo consiste em explicitar uma caracterização completa, em termos do parâmetro K, das condições de existência de triângulos retângulos com perímetro e área dados, bem como em apresentar uma dedução elementar dessa condição a partir da análise do discriminante associado. Para isso, apoiamo-nos no estudo de desigualdades geométricas consolidado por Bottema *et al.* [4].

Além disso, exploramos a relação com elementos notáveis do triângulo e apresentamos aplicações gráficas que podem ser implementadas em softwares como o GeoGebra. Para isso, desenvolvemos um sistema de equações que permite expressar os lados do triângulo em função desses parâmetros e analisamos as restrições impostas pelo discriminante associado, estabelecendo assim as fronteiras isoperimétricas que caracterizam o domínio de existência dos triângulos retângulos no plano dos parâmetros (p, A)

2 A determinação dos lados por meio da área e do perímetro

A partir da formulação do problema, consideramos determinar as medidas exatas da hipotenusa a e dos catetos b e c de um triângulo retângulo, assumindo como dados de entrada apenas o perímetro $p \in \mathbb{R}_+^*$ e a área $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Sabemos que o perímetro é a soma das medidas do contorno da figura, logo, $p = a + b + c$. Dessa

igualdade, convém isolar a soma dos dois catetos:

$$b + c = p - a \tag{1}$$

Simultaneamente, a área de qualquer triângulo retângulo é calculada pelo semiproduto de seus catetos, o que nos entrega uma relação direta para o produto dessas medidas:

$$bc = 2A \tag{2}$$

Para conectar a soma e o produto à hipotenusa, utilizamos o Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$). Expressando a soma dos quadrados por meio do quadrado da soma, temos $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$. Rearranjando os termos, obtemos a identidade:

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc \tag{3}$$

Substituindo as Equações (1) e (2) na identidade (3), construímos uma equação livre de b e c:

$$a^2 = (p - a)^2 - 4A$$

Ao expandirmos o binômio no segundo membro da equação, notamos um cancelamento direto:

$$a^2 = p^2 - 2pa + a^2 - 4A$$

Cancelando o termo a^2 e isolando a, obtemos $2pa = p^2 - 4A$. Dividindo a equação por $2p$, conclui-se que:

$$a = \frac{p^2 - 4A}{2p} \tag{4}$$

A hipotenusa fica determinada. O próximo passo consiste em encontrar b e c. Sendo conhecidas a soma $S = b + c = p - a$ e o produto $P = bc = 2A$, as medidas dos catetos são as raízes de uma equação polinomial do segundo grau na variável auxiliar x:

$$x^2 - (p - a)x + 2A = 0 \tag{5}$$

Aplicando a fórmula resolutiva tradicional, extraímos as raízes:

$$x = \frac{(p - a) \pm \sqrt{(p - a)^2 - 8A}}{2}$$

Para obtermos uma fórmula analítica que dependa estritamente das condições iniciais p e A, inserimos o resultado da Equação (4) na expressão do discriminante (que chamaremos de Δ). Analisemos apenas o interior do radicando:

$$\Delta = \left(p - \frac{p^2 - 4A}{2p}\right)^2 - 8A = \left(\frac{p^2 + 4A}{2p}\right)^2 - 8A$$

Elevando a fração ao quadrado e juntando a constante $8A$ ao denominador comum $4p^2$:

$$\Delta = \frac{p^4 + 8p^2A + 16A^2}{4p^2} - \frac{32p^2A}{4p^2}$$

$$\Delta = \frac{p^4 - 24p^2A + 16A^2}{4p^2} \tag{6}$$

Com o discriminante simplificado, substituímos o termo $(p - a)$ fora da raiz por $\frac{p^2+4A}{2p}$. Assim, as medidas dos catetos ficam formalmente definidas por:

$$b = \frac{p^2 + 4A + \sqrt{p^4 - 24p^2A + 16A^2}}{4p} \tag{7}$$

$$c = \frac{p^2 + 4A - \sqrt{p^4 - 24p^2A + 16A^2}}{4p} \tag{8}$$

Essas expressões garantem que, se as grandezas p e A pertencerem a um triângulo retângulo real, os três lados podem ser calculados sem qualquer menção prévia a ângulos internos.

3 Desigualdade isoperimétrica

Problemas que relacionam área e perímetro ocupam posição central na geometria clássica e estão intimamente ligados ao estudo das chamadas desigualdades isoperimétricas. De forma geral, tais problemas investigam quais figuras geométricas maximizam ou minimizam a área quando se fixa o comprimento de seu contorno. Essa linha de investigação remonta à matemática da Grécia Antiga, onde já se discutiam propriedades extremas de figuras planas. Resultados tradicionalmente atribuídos a Zenodoro, no século II a.C., indicavam que, entre polígonos com mesmo perímetro, aquele com maior número de lados possui maior área, sugerindo o círculo como limite extremo dessa família de figuras. No caso particular dos triângulos, sabe-se que, entre todas as configurações com perímetro fixo, o triângulo equilátero é aquele que maximiza a área, resultado que pode ser obtido por diferentes abordagens analíticas, incluindo o uso da fórmula de Heron combinado com desigualdades clássicas entre médias. Para uma exposição detalhada da história do problema e de demonstrações geométricas da desigualdade isoperimétrica, ver, por exemplo, Silva [5].

É precisamente essa base teórica clássica que nos permite balizar o espaço de soluções do nosso problema. Antes de aplicarmos a resolução puramente algébrica desse discriminante, é imprescindível estabelecer as fronteiras morfológicas através do problema isoperimétrico. Qualquer triângulo obedece a uma relação estrita entre o comprimento de seu contorno e a medida da região delimitada. A demonstração analítica dessa restrição decorre da otimização da Fórmula de Heron, que expressa a área A em função do semiperímetro $s = \frac{p}{2}$ e das medidas dos lados a, b e c:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \tag{9}$$

Para maximizar a área em relação a um perímetro constante, aplicamos o Teorema da Desigualdade das Médias, o qual estabelece que a Média Aritmética (MA) de um conjunto de números reais não negativos é sempre maior ou igual à sua Média Geométrica (MG). Tomando especificamente os três fatores referentes aos lados do triângulo ou seja, $(s - a)$, $(s - b)$ e $(s - c)$, a desigualdade nos garante que:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3}$$

Analisando apenas o numerador da fração no membro direito, notamos que a soma se simplifica de forma notável. Sabendo que o perímetro é $a + b + c = 2s$, temos:

$$(s - a) + (s - b) + (s - c) = 3s - (a + b + c) = 3s - 2s = s$$

Substituindo esse resultado de volta na desigualdade:

$$\sqrt[3]{(s - a)(s - b)(s - c)} \leq \frac{s}{3}$$

Elevando ambos os lados da inequação ao cubo para isolar o produto dos fatores:

$$(s - a)(s - b)(s - c) \leq \frac{s^3}{27}$$

Agora, substituímos essa relação de máximo na Equação (9):

$$A^2 \leq s \cdot \left(\frac{s^3}{27}\right)$$

$$A^2 \leq \frac{s^4}{27}$$

Como o semiperímetro é definido por $s = \frac{p}{2}$, substituímos s na inequação:

$$A^2 \leq \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^4}{27} \implies A^2 \leq \frac{\frac{p^4}{16}}{27} \implies A^2 \leq \frac{p^4}{432}$$

Rearranjando os termos para isolar o perímetro, obtemos $p^4 \geq 432A^2$. Ao extrairmos a raiz quadrada de ambos os lados, e sabendo que $\sqrt{432} = \sqrt{144 \cdot 3} = 12\sqrt{3}$, chegamos à desigualdade isoperimétrica fundamental para triângulos:

$$p^2 \geq 12\sqrt{3}A \tag{10}$$

A condição de igualdade geométrica absoluta ocorre unicamente quando os três lados são idênticos ($a = b = c$). Pela desigualdade isoperimétrica, o triângulo equilátero maximiza a área para um dado perímetro, correspondendo à constante limite $K_{eq} = \frac{p^2}{A} = 12\sqrt{3}$. Se a razão $\frac{p^2}{A}$ de qualquer configuração resultar em um valor menor que $12\sqrt{3}$, o polígono geometricamente não fecha.

Algebricamente, essa otimização global para triângulos quaisquer pode ser expressa pela relação clássica entre o perímetro p e a área A, dada pela desigualdade $p^2 \geq 12\sqrt{3}A$. A igualdade, que define a fronteira de existência geométrica, ocorre se, e somente se, o polígono for um triângulo equilátero.

Contudo, quando o espaço de soluções é restrito a uma subfamília específica como a dos triângulos retângulos, a exigência de um ângulo interno reto impede que a figura assuma a conformação equilátera ótima. Consequentemente, há uma perda natural de eficiência isoperimétrica, o que desloca o limite de existência para uma fronteira específica. Nesse cenário restrito, o polígono que passa a maximizar a área para um dado perímetro é o triângulo retângulo isósceles. O presente estabelecer analiticamente o valor exato dessa nova constante limite e caracterizar rigorosamente a região de viabilidade para essa classe geométrica.

Ao impormos a restrição da ortogonalidade, isto é, a obrigatoriedade de um ângulo interno de 90°, o triângulo afasta-se da forma equilátera. A configuração de maior eficiência de área possível para a classe dos triângulos retângulos ocorre em seu estado de simetria máxima, o triângulo retângulo isósceles, em que os catetos são congruentes, $b = c$, e a hipotenusa é dada por

$$a = b\sqrt{2}.$$

Como $b = c$, o perímetro pode ser escrito como:

$$p = a + b + c = b\sqrt{2} + b + b = b(2 + \sqrt{2}),$$

De modo que:

$$b = c = \frac{p}{2 + \sqrt{2}}.$$

Sabendo que a área do triângulo retângulo isósceles é:

$$A = \frac{bc}{2} = \frac{b^2}{2},$$

Obtemos:

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2 + \sqrt{2}}\right)^2 = \frac{p^2}{12 + 8\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$K_{\text{ret}} = \frac{p^2}{A} = 12 + 8\sqrt{2}.$$

Esta dedução prova que a ortogonalidade impõe uma restrição de contorno mais severa. A proporção isoperimétrica mínima exigida transita de $12\sqrt{3}$ (para qualquer triângulo) para $12 + 8\sqrt{2}$ (para um triângulo de 90°). Qualquer relação $\frac{p^2}{A}$ que recaia no intervalo aberto $(12\sqrt{3}, 12 + 8\sqrt{2})$ inviabiliza não apenas a ortogonalidade, mas também a existência de configurações obtusângulas, de modo que os triângulos correspondentes são necessariamente acutângulos.

4 Análise do limite pelo discriminante

Com base nas expressões obtidas para os lados, podemos agora determinar as condições exatas de existência por meio da análise do discriminante. Para estabelecer as condições exatas de existência, analisamos a inequação gerada pelo discriminante das Equações (7) e (8):

$$\Delta = \frac{p^4 - 24p^2A + 16A^2}{4p^2} \geq 0$$

Dado que o denominador $4p^2$ é estritamente positivo para todo $p > 0$, a restrição recai exclusivamente sobre o numerador:

$$p^4 - 24p^2A + 16A^2 \geq 0$$

Dividindo todos os termos por A^2 e empregando a constante genérica $K = \frac{p^2}{A}$, reduzimos o problema a uma inequação quadrática direta:

$$K^2 - 24K + 16 \geq 0 \tag{11}$$

Para determinar os pontos críticos, tratamos a inequação como uma equação do segundo grau e aplicamos a fórmula resolutiva de Bhaskara. O discriminante desta equação auxiliar em função de K é dado por:

$$\Delta_K = (-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 576 - 64 = 512$$

Sabendo que $\sqrt{512} = \sqrt{256 \cdot 2} = 16\sqrt{2}$, calculamos as raízes algébricas:

$$K = \frac{24 \pm 16\sqrt{2}}{2} = 12 \pm 8\sqrt{2}$$

O estudo do sinal da parábola associada a $K^2 - 24K + 16$ indica que a inequação é satisfeita nos intervalos externos às raízes. Logo, a resolução puramente algébrica forneceria duas condições de validade:

$$K \leq 12 - 8\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad K \geq 12 + 8\sqrt{2}$$

Neste ponto, a interpretação geométrica do problema torna-se necessária. A raiz inferior dita a condição $K \leq 12 - 8\sqrt{2}$. É imediato notar que o valor exato $12 - 8\sqrt{2}$ é estritamente menor que a constante absoluta do equilátero $12\sqrt{3}$. Conforme estabelecido na Seção 3, não existe triângulo que satisfaça uma constante isoperimétrica inferior a $12\sqrt{3}$.

A condição $K \leq 12 - 8\sqrt{2}$ implica um valor inferior à constante isoperimétrica universal $12\sqrt{3}$. Trata-se, portanto, de uma raiz algébrica sem significado geométrico para polígonos, devendo ser descartada.

A única restrição algebricamente verdadeira e espacialmente possível concentra-se, portanto, na raiz superior:

$$K \geq 12 + 8\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad p^2 \geq (12 + 8\sqrt{2})A \tag{12}$$

Conclui-se que a restrição algébrica do discriminante das equações laterais culmina de forma exata na constante limite $12 + 8\sqrt{2}$, convergindo integralmente com a demonstração puramente geométrica do triângulo retângulo isósceles.

A condição obtida é equivalente à estabelecida por Dobbs [3] para triângulos retângulos com área e perímetro prescritos. Enquanto Dobbs obtém essa fronteira a partir de uma normalização por semelhança e da minimização do perímetro com auxílio do cálculo diferencial, no presente trabalho ela decorre diretamente da condição de não negatividade do discriminante. Essa formulação permite ainda expressar a fronteira por meio do parâmetro adimensional $K = p^2/A$ e obter explicitamente as medidas dos lados em função de p e A.

5 Condições de existência e o parâmetro K

A formulação algébrica desenvolvida na seção anterior nos fornece as medidas dos lados do triângulo em função do perímetro p e da área A. No entanto, para que essas medidas correspondam a segmentos de reta reais e formem um polígono fechado, é imperativo estabelecer restrições rigorosas sobre os valores que p e A podem assumir simultaneamente.

Para formalizar essas restrições de maneira elegante e conectá-las aos princípios da isoperimetria, introduzimos o parâmetro adimensional K, definido como a razão entre o quadrado do perímetro e a área da figura:

$$K = \frac{p^2}{A} \tag{13}$$

A partir desta parametrização, podemos enunciar o resultado central deste trabalho, que caracteriza o espaço exato de existência dos triângulos retângulos.

Teorema 1 (Condição de Existência) *Sejam $p, A \in \mathbb{R}_+^*$ o perímetro total e a área de um polígono hipotético. Uma condição necessária e suficiente para que exista um triângulo retângulo não degenerado com tais parâmetros é que a constante isoperimétrica $K = \frac{p^2}{A}$ satisfaça a desigualdade:*

$$K \geq 12 + 8\sqrt{2} \tag{14}$$

Condição Necessária: Assumindo a existência de um triângulo retângulo de catetos b, c e hipotenusa a, sabemos pelas relações geométricas fundamentais (Teorema de Pitágoras e definição de área) que a soma S e o produto P dos catetos podem ser expressos em função de p e A. Conforme deduzido na seção anterior, os catetos são as raízes da equação quadrática:

$$x^2 - Sx + P = 0 \tag{15}$$

Para que as medidas b e c pertençam ao conjunto dos números reais, o discriminante Δ dessa equação deve ser não negativo. Impondo a condição $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$ sobre as expressões algébricas obtidas, chegamos à inequação polinomial restrita ao parâmetro K:

$$K^2 - 24K + 16 \geq 0 \tag{16}$$

As raízes da equação $K^2 - 24K + 16 = 0$ são dadas por $K = 12 \pm 8\sqrt{2}$. Como $p, A > 0$, o parâmetro K deve ser estritamente positivo. A raiz inferior $K \leq 12 - 8\sqrt{2}$ deve ser descartada pois, pela desigualdade isoperimétrica clássica, o valor mínimo absoluto de K para qualquer triângulo no plano euclidiano é $12\sqrt{3}$. Portanto, a única região algebricamente válida e com significado geométrico é:

$$K \geq 12 + 8\sqrt{2} \tag{17}$$

Condição Suficiente (Positividade e Desigualdade Triangular): Resta provar que, se a condição $K \geq 12 + 8\sqrt{2}$ for satisfeita para dados $p, A \in \mathbb{R}_+^*$, então os valores encontrados para a, b, c são reais, estritamente positivos e fecham um triângulo.

1. *Positividade dos Lados:* Como o produto dos catetos é $P = 2A > 0$, as raízes b e c necessariamente possuem o mesmo sinal. Sabendo que o perímetro $p > 0$ e a área $A > 0$, a expressão da soma dos catetos S se mantém positiva no domínio válido de K. Logo, concluímos que $b, c \in \mathbb{R}_+^*$. A hipotenusa, dada por $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, é trivialmente real e positiva.

2. *Desigualdade Triangular:* Para que a figura se feche, a métrica de qualquer lado deve ser estritamente inferior à soma dos outros dois, o que se reduz a provar que $a < b + c$. Como p é o perímetro total, temos que $b + c = p - a$. A condição $a < p - a$ é algebricamente equivalente a $2a < p$, ou seja, $a < \frac{p}{2}$. Pela nossa dedução analítica prévia, a hipotenusa é expressa por:

$$a = \frac{p}{2} - \frac{2A}{p} \tag{18}$$

Uma vez que $A \in \mathbb{R}_+^*$ e $p \in \mathbb{R}_+^*$, a fração $\frac{2A}{p}$ é estritamente positiva, o que garante inequivocamente que $a < \frac{p}{2}$.

Dessa forma, os segmentos de reta gerados cumprem todos os axiomas da geometria euclidiana plana para a formação de um triângulo retângulo não degenerado.

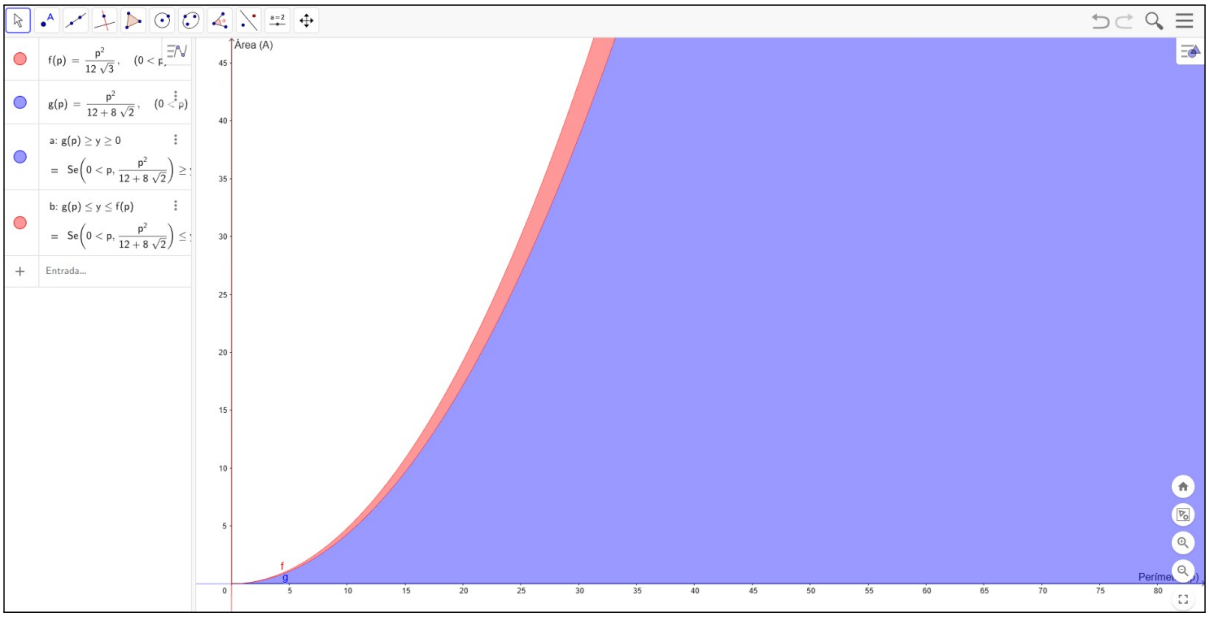
Esta formalização não apenas atesta a validade absoluta das raízes encontradas, mas também consolida o valor exato da constante isoperimétrica ($12+8\sqrt{2}$) específica para a família dos triângulos retângulos, diferenciando-a do limite global imposto pelo triângulo equilátero.

6 Análise do espaço paramétrico e zonas de existência

A demonstração analítica do Teorema 1 e a desigualdade isoperimétrica clássica permitem-nos mapear essas condições de viabilidade geométrica através de ferramentas de geometria dinâmica [6]. Considerando o perímetro p no eixo das abcissas e a área A no eixo das ordenadas, definimos o espaço paramétrico universal como $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Através das fronteiras estabelecidas pelas constantes $K_{eq} = 12\sqrt{3}$ (para triângulos em geral) e $K_{ret} = 12 + 8\sqrt{2}$ (para triângulos retângulos), o espaço $\mathcal{U}$ é particionado em três subconjuntos. A Figura 1 apresenta a divisão do plano paramétrico em três regiões: a região Ω_0, correspondente à impossibilidade de existência de triângulos, a região Ω_1, na qual toda configuração triangular é necessariamente acutângula, e a região Ω_2, na qual os parâmetros considerados admitem a existência de uma configuração retangular.

Figura 1: Domínios Geométricos: Área (A) em função do Perímetro (p).



Fonte: Elaborado pelo próprio autor no GeoGebra [6].

1. **Zona de impossibilidade geométrica (Ω_0):** Corresponde à região do plano em que a área excede o máximo possível para um triângulo com perímetro p. Portanto, não existe qualquer triângulo não degenerado com os parâmetros (p, A) considerados.

$$\Omega_0 = \left\{ (p, A) \in \mathcal{U} \mid A > \frac{p^2}{12\sqrt{3}} \right\}.$$

2. **Zona exclusivamente acutângula (Ω_1):** Corresponde à região em que existem triângulos com os parâmetros (p, A), mas nenhum deles pode ser retângulo ou obtusângulo. Consequentemente, todo triângulo com perímetro p e área A pertencente a esta região é necessariamente acutângulo. No limite superior ocorre o triângulo equilátero, que também é acutângulo.

$$\Omega_1 = \left\{ (p, A) \in \mathcal{U} \mid \frac{p^2}{12 + 8\sqrt{2}} < A \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}} \right\}.$$

3. **Zona de existência de triângulos retângulos (Ω_2):** Corresponde à região em que, para cada par (p, A), existe um triângulo retângulo não degenerado com esse perímetro e essa área. Na fronteira $A = p^2/(12 + 8\sqrt{2})$, a configuração retangular é isósceles. Abaixo dessa fronteira, a configuração retangular é escalena. A pertença a Ω_2, entretanto, não implica que todo triângulo com os mesmos valores de p e A seja retângulo, pois outras configurações angulares podem compartilhar esses parâmetros.

$$\Omega_2 = \left\{ (p, A) \in \mathcal{U} \mid 0 < A \leq \frac{p^2}{12 + 8\sqrt{2}} \right\}.$$

As curvas que delimitam estas regiões atuam como fronteiras de otimização. A curva superior, $A(p) = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$, representa o lugar geométrico dos triângulos equiláteros. De forma análoga, a curva inferior, $A(p) = \frac{p^2}{12+8\sqrt{2}}$, constitui a fronteira analítica do nosso modelo e descreve o lugar geométrico dos triângulos retângulos isósceles, que são os polígonos que maximizam a área dentro da família dos triângulos retângulos.

7 Análise de eficiência e o domínio do quociente isoperimétrico

A avaliação geométrica das fronteiras de existência exige a introdução de um parâmetro que quantifique a relação entre o contorno de uma figura e a sua respectiva área. Na literatura matemática, esta relação é formalmente capturada pelo Quociente Isoperimétrico [7], definido como a razão entre a área da figura e a área de um círculo que possua o mesmo perímetro.

Sendo a área do círculo dada por $A_c = \pi r^2$ e o seu perímetro por $p = 2\pi r$, a eliminação do raio conduz à relação máxima $p^2 = 4\pi A_c$. Desta forma, para qualquer polígono de perímetro p e área A, o quociente Q (frequentemente denotado na literatura em função do comprimento L) é algebricamente expresso por:

$$Q = \frac{4\pi A}{p^2} \tag{19}$$

Pela desigualdade isoperimétrica clássica, este quociente é estritamente limitado ao intervalo $0 < Q \leq 1$, onde o limite máximo $Q = 1$ ocorre se, e somente se, a figura for um círculo [7].

Na geometria euclidiana, o limite superior absoluto é $Q = 1$, atingido exclusivamente pelo círculo. Para polígonos, este valor decresce conforme as restrições angulares e de simetria aumentam. Através das condições de existência estabelecidas neste trabalho, definem-se os seguintes intervalos de validade para a caracterização do espaço trilateral:

- **Domínio de existência de triângulos retângulos escalenos ($Q < \frac{\pi}{3+2\sqrt{2}}$):** Neste intervalo, os parâmetros considerados admitem a existência de um triângulo retângulo escaleno. O discriminante da equação geradora é positivo, produzindo duas medidas distintas para os catetos.

- **Fronteira de existência do triângulo retângulo isósceles ($Q = \frac{\pi}{3+2\sqrt{2}}$):** Neste valor, a configuração retangular atinge sua máxima eficiência isoperimétrica. O discriminante anula-se e os catetos da configuração retangular tornam-se iguais.

- **Zona de inexistência de triângulos retângulos ($\frac{\pi}{3+2\sqrt{2}} < Q \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$):** Este intervalo compreende as formas que possuem área excessivamente eficiente para a restrição de um ângulo reto, estendendo-se até o limite do triângulo equilátero ($Q \approx 0,604$). Para qualquer par (p, A) neste domínio, o cálculo do discriminante resultará em valores negativos, indicando que a rigidez da ortogonalidade impede o fechamento da figura; nestes casos, o triângulo só existirá se for acutângulo.

- **Impossibilidade Geométrica Triangular ($Q > \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$):** Valores de Q superiores a aproximadamente $0,604$ indicam que a relação área-perímetro excede a capacidade física de qualquer triângulo, independentemente de seus ângulos internos.

A aplicação prática desta análise reside no diagnóstico imediato da viabilidade geométrica. Antes de proceder com cálculos de trigonometria ou álgebra linear, o calculista pode utilizar o valor de Q para verificar se as restrições de projeto permitem a existência de um ângulo reto. Se o diagnóstico resultar em $Q > 0,539$, o projetista é informado instantaneamente sobre a necessidade de transição para modelos acutângulos ou poligonais de maior simetria, otimizando o processo de modelagem.

8 Condições para a obtenção de medidas inteiras e a formação de ternos pitagóricos

A transposição do modelo algébrico contínuo para o domínio dos números inteiros caracterizando os denominados triângulos heronianos retângulos (cujos lados formam ternos pitagóricos) exige o cumprimento de critérios rigorosos da Teoria dos Números, especificamente regras de divisibilidade e resíduos quadráticos. Assumindo que as grandezas $a, b, c, p, A \in \mathbb{N}^*$, a obtenção de medidas inteiras para os lados do polígono está intrinsecamente vinculada à natureza do raio da circunferência inscrita (r) e à paridade do perímetro [1].

É um fato aritmético fundamental que, em qualquer triângulo retângulo de lados inteiros, o perímetro p é obrigatoriamente um número par. Esta propriedade decorre diretamente da parametrização clássica dos ternos pitagóricos, gerados por $k(m^2 - n^2)$, $k(2mn)$ e $k(m^2 + n^2)$ para inteiros $m > n > 0$. A soma destes termos resulta no perímetro da figura, dado por $p = 2km(m+n)$, o que evidencia o fator 2 e garante a sua paridade.

Sob esta premissa geométrica e aritmética, resgatamos a notável identidade deduzida no nosso modelo, que relaciona linearmente a hipotenusa ao semiperímetro e ao inraio:

$$a = \frac{p}{2} - r \tag{20}$$

Sabendo que a relação universal do inraio dita que $r = \frac{2A}{p}$, a Equação (20) permite-nos estabelecer dois critérios analíticos definitivos para que as medidas a, b e c pertençam ao conjunto dos números inteiros:

1. **Critério da Hipotenusa e do Inraio Inteiro:** Uma vez que p é par, a fração $\frac{p}{2}$ resulta num número inteiro exato. Consequentemente, para que a medida da hipotenusa a seja inteira, é

condição necessária e suficiente que o raio $r = \frac{2A}{p}$ também o seja. Isto implica rigorosamente que o perímetro p deve ser um divisor exato do dobro da área, estabelecendo a relação de divisibilidade $p \mid 2A$ como o primeiro requisito estrutural.

2. **Critério dos Catetos e do Discriminante Quadrático:** Para que os catetos b e c assumam valores inteiros, o discriminante da equação geradora, expresso por $\Delta = (p-a)^2 - 8A$, deve ser estritamente um quadrado perfeito ($\sqrt{\Delta} \in \mathbb{N}$). Adicionalmente, esta raiz quadrada deve possuir a mesma paridade da diferença $(p-a)$. Esta restrição de paridade garante que, ao aplicarmos a fórmula resolvente da equação quadrática, o numerador da expressão resultante seja um número par, produzindo catetos inteiros e exatos após a divisão por dois.

Dessa forma, a exigência de divisibilidade para um inraio inteiro, aliada à condição de quadrado perfeito para o discriminante, constitui o arcabouço analítico necessário e suficiente. Através destas condições, torna-se possível determinar a existência e a exatidão de triângulos retângulos de dimensões inteiras partindo exclusivamente de suas propriedades escalares globais (p e A).

9 Considerações finais

Neste trabalho, investigou-se de forma exaustiva o problema inverso da geometria plana associado à determinação analítica e morfológica de triângulos retângulos a partir exclusivamente das suas grandezas globais: a área e o perímetro. A transição de um sistema clássico de relações métricas para uma modelação puramente algébrica, governada pela análise de discriminantes, demonstrou que é possível dispensar o cálculo diferencial para obter resultados rigorosos de otimização geométrica.

O principal avanço analítico desta pesquisa reside na prova de que a exigência de ortogonalidade (um ângulo interno reto) impõe uma constrição severa à eficiência isoperimétrica da figura. Demonstrou-se que o limite de maximização sofre um deslocamento exato da fronteira universal dos triângulos ($K = 12\sqrt{3}$) para a restrição estrita de $K \geq 12 + 8\sqrt{2}$. Esta constante atua como uma fronteira bem definida, estabelecendo que o triângulo retângulo isósceles é a figura que encapsula a maior área possível para um perímetro dado dentro desta subfamília.

Adicionalmente, o particionamento do espaço paramétrico em subconjuntos rigorosamente definidos ($\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$) permitiu traduzir a abstração dos polinómios através da interpretação geométrica. Esta abordagem mostra que as regiões paramétricas não constituem meras aproximações gráficas, mas correspondem a domínios definidos por inequações que caracterizam diferentes condições de viabilidade geométrica.

Por fim, a transposição deste modelo contínuo para o domínio da Teoria dos Números revelou-se um desdobramento natural e robusto do sistema gerador. Ao estabelecer que a formação de ternos pitagóricos (triângulos heronianos) depende estritamente da relação de divisibilidade do inraio ($p \mid 2A$) e da invariância de paridade da raiz do discriminante, o modelo unificou conceitos de geometria contínua com a análise diofantina.

Em suma, o presente artigo oferece uma contribuição que integra álgebra polinomial, geometria analítica e teoria dos números. Do ponto de vista pedagógico e acadêmico, a metodologia aqui desenvolvida fornece uma base conceitual rigorosa para o ensino avançado e para a investigação isoperimétrica.

Referências

[1] CARDELIQUIO, L. H. P. Relação entre área, perímetro e medidas dos lados em triângulos retângulos e triângulos isósceles. **Revista de Iniciação Científica PET Matemática**, São José do Rio Preto, v. 6, p. 5–13, 2022. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/PET2/ricpetmat-2022.pdf. Acesso em: 18 mar. 2026.

[2] CARDELIQUIO, L. H. P. Triângulos retângulos e suas propriedades. **Revista de Iniciação Científica PET Matemática**, São José do Rio Preto, v. 7, p. 5–11, 2023. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/PET2/ricpetmat---2023.pdf. Acesso em: 18 mar. 2026.

[3] DOBBS, D. E. On the euclidean triangles with prescribed area and perimeter. **Far East Journal of Mathematical Education**, Allahabad, v. 18, n. 1, p. 21–40, 2018. Disponível em: https://pphmjopenaccess.com/fejme/article/view/5049. Acesso em: 10 set. 2026.

[4] BOTTEMA, O. *et al.* **Geometric Inequalities**. Groningen: Wolters-Noordhoff Publishing, 1969.

[5] SILVA, C. C. de A. **A desigualdade isoperimétrica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

[6] GEOGEBRA. **Modelo interativo**: zonas de existência do triângulo retângulo. 2026. Aplicativo. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/mry2h4bf. Acesso em: 18 mar. 2026.

[7] OSSERMAN, R. The isoperimetric inequality. **Bulletin of the American Mathematical Society**, Providence, v. 84, n. 6, p. 1182–1238, 1978.