Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 27, 2026
Artigo de Pesquisa

Luís Cláudio Yamaoka
Universidade Federal de São Paulo (Unifesp), Escola Paulista de Política, Economia e Negócios, Osasco, luis.yamaoka@unifesp.br

A representação-FM para a função quadrática - Parte 1

The FM-representation for the quadratic function - Part 1

Resumo

Fixados $b_0, c_0 \in \mathbb{R}$, sejam as famílias de funções $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $F_a(x) = ax^2 + b_0x + c_0$, $a \in \mathbb{R}^*$, e $f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \in \mathbb{R}^*$. O problema de pesquisa consiste em variar a para obter a *representação-F_aM*, que acopla simultaneamente o plano cartesiano no qual o gráfico de F_a evolui e o plano complexo no qual são traçados os caminhos das duas raízes de f_a. Metodologicamente, empregam-se conceitos de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial. Determina-se também a curvatura de $\lambda_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\lambda_a(x) = (x, ax^2)$ em um x_0 fixo. Demonstra-se que a sequência de funções $(F_n^+)^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ dada por $(F_n^+)^{-1}(W) = \sqrt{W/n}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, converge simplesmente, mas não uniformemente, para 0, enquanto $(F_n^+)^{-1}\big|_{[0,M]}$ converge uniformemente para 0, para $M > 0$ fixo. Conclui-se que a *representação-F_aM* unifica a geometria da parábola e a dinâmica das raízes.
Palavras-chave: função quadrática; gráfico; caminhos; representação-FM.

Abstract

Given $b_0, c_0 \in \mathbb{R}$, let the families of functions $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be given by $F_a(x) = ax^2 + b_0x + c_0$, $a \in \mathbb{R}^*$, and $f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be given by $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \in \mathbb{R}^*$. The research problem consists of varying a to obtain the *F_aM-representation*, which simultaneously couples the Cartesian plane in which the graph of F_a evolves and the complex plane in which the paths of the two roots of f_a are traced. Methodologically, concepts of analytic geometry and differential calculus are employed. The curvature of $\lambda_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ given by $\lambda_a(x) = (x, ax^2)$ at a fixed x_0 is also determined. It is shown that the sequence of functions $(F_n^+)^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ given by $(F_n^+)^{-1}(W) = \sqrt{W/n}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, converges pointwise, but not uniformly, to 0, while $(F_n^+)^{-1}\big|_{[0,M]}$ converges uniformly to 0, for a fixed $M > 0$. It is concluded that the *F_aM-representation* unifies the geometry of the parabola and the dynamics of the roots.
Keywords: quadratic function; graph; paths; FM-representation.

Artigo recebido em jul. 2026 e aceito em out. 2026

Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.

1 Introdução

Fixados $b_0, c_0 \in \mathbb{R}$, sejam as famílias de funções $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $F_a(x) = ax^2 + b_0x + c_0$, e $f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \in \mathbb{R}^*$. A 1ª raiz de f_a é $z_1 \doteq x_1 + y_1i = \left(-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}\right)/2a$ e a 2ª raiz é $z_2 \doteq x_2 + y_2i = \left(-b_0 - \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}\right)/2a$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$.

A questão central que orienta este trabalho é: como podemos construir e utilizar uma ferramenta de visualização simultânea que conecte diretamente a evolução geométrica da parábola F_a no plano real com a dinâmica dos caminhos das duas raízes de f_a no plano complexo, conforme a é variado?

Para responder a essa questão, o objetivo central deste artigo é apresentar e construir a chamada *representação-F_aM* aplicada à função quadrática. Esta representação propõe a união, em uma única figura, de duas abordagens visuais: a *representação-F_a*, que consiste no plano cartesiano (xOW) onde o gráfico da parábola F_a evolui ao se variar o coeficiente a; e a *representação-M* ([1] e [2]), que consiste no plano complexo (xOy) onde são traçados os caminhos descritos pelas duas raízes de f_a. A *representação-F_aM* é a disposição da *representação-F_a* seguida, logo abaixo, e com os eixos W e y alinhados, da *representação-M*. Além da construção teórica, o artigo tem como propósito consolidar essa ferramenta como um instrumento didático versátil, desenhado tanto para o Ensino Médio – com foco na visualização sem o uso rigoroso do Cálculo Diferencial – quanto para a graduação, por meio da aplicação de conceitos do Cálculo Diferencial, das convergências simples, uniforme e não uniforme de sequências de funções, e da curvatura de uma curva parametrizada.

É de primeira importância estabelecer a relação entre a contribuição deste artigo e os trabalhos [1] e [2] que pavimentaram esta pesquisa. A relação fundamental é que, quando $\Delta = b_0^2 - 4ac_0 \geq 0$, as raízes (reais) de F_a são as de f_a, ou seja, o estudo pormenorizado dos caminhos das duas raízes reais de f_a é retomado para dar precisão aos caminhos das duas raízes (reais) de F_a. Ademais, esses caminhos são indispensáveis para estabelecer a propriedade das parábolas encaixantes (subseção 3.1), que afirma que, dados α, β tais que $\beta < \alpha < 0$ (ou $\beta > \alpha > 0$), a parábola F_β é interna à parábola F_α. Outras relações notáveis (entre os resultados aqui desenvolvidos e aqueles apresentados em [1] e em [2]) são mencionadas/observadas nas figuras das *representações-F_aM*, em especial nas situações em que $a \to 0^\pm$ e $a \to \pm\infty$.

Constituem contribuições específicas deste artigo:

1) A inovação do acoplamento bidimensional, ao fundir o conhecimento prévio de [1] e [2] com a geometria da parábola, entregando uma representação unificada (F_aM) que correlaciona a evolução do gráfico real e o movimento das raízes complexas em um único panorama visual, o que não havia sido feito anteriormente.

2) O estabelecimento de uma relação entre a curvatura de $\lambda_a(x) = (x, ax^2 + c_0)$, com $c_0 > 0$, no seu vértice e a distância entre as duas raízes de $f_a(z) = az^2 + c_0$ (subseção 3.2).

3) A interpretação do significado da curvatura de $\lambda_a(x) = (x, ax^2)$ em $x_0 = 0$ (no seu vértice) e em $x_0 = 0.5$ à medida que a cresce (subseção 3.2).

4) A prova de que a sequência de funções inversas $(F_n^+)^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ dada por $(F_n^+)^{-1}(W) = \sqrt{W/n}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, converge simplesmente, mas não uniformemente, para 0, enquanto $(F_n^+)^{-1}\big|_{[0,M]}$ converge uniformemente para 0, para $M > 0$ fixo (subseção 3.3).

Como perspectivas diretas para os desenvolvimentos futuros desta pesquisa, projeta-se a construção da *representação-F_bM* (fixando os reais $a_0 \neq 0$ e c_0, e variando b) e da *representação-F_cM* (fixando os reais $a_0 \neq 0$ e b_0, e variando c). Esses próximos passos prometem consolidar, em sua totalidade, um panorama analítico e unificado sobre o comportamento das funções quadráticas.

2 Construindo as representações

1) A *representação-$F_aM[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$*

Fixados os números reais $b_0 > 0$ e $c_0 > 0$, para cada $a \in \mathbb{R}^*$, seja $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_a(x) = ax^2 + b_0x + c_0$. Denotamos o gráfico de F_a, que é uma parábola, por $graf F_a$. Temos

$$graf\ F_\alpha \cap graf\ F_\beta = \{(0, c_0)\}, \quad \text{para } \alpha \neq \beta, \tag{1}$$

pois igualando as duas funções para encontrar pontos de interseção, temos $\alpha x^2 + b_0x + c_0 = \beta x^2 + b_0x + c_0$, o que se reduz a $(\alpha - \beta)x^2 = 0$. Como a premissa estabelece $\alpha \neq \beta$, a única solução possível é $x = 0$. Isso isola $(0, c_0)$ como o único ponto de interseção.

Para cada $a \in \mathbb{R}^*$, a reta $t : W = b_0x + c_0$, em que $b_0 = F_a'(0)$, é tangente a F_a em $(0, c_0)$. (2)

Para cada $a \in \mathbb{R}^*$, F_a tem vértice $V_a = (x_{V_a}, W_{V_a})$, onde $W_{V_a} = \dfrac{b_0}{2}x_{V_a} + c_0$, isto é, (3)

$$V_a \text{ está sobre a reta } v : W = \frac{b_0}{2}x + c_0 \text{ , exceto em } (0, c_0). \tag{4}$$

Procedemos à construção da *representação-$F_aM[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$* (Figura 1):
a) Traçar o sistema de coordenadas cartesianas xOW;
b) Traçar a reta v: $W = \frac{b_0}{2}x + c_0$ passando por $(0, c_0)$ e por $\big(-\frac{2c_0}{b_0}, 0\big)$;
c) Traçar a reta t: $W = b_0x + c_0$ passando por $(0, c_0)$ e por $\big(-\frac{c_0}{b_0}, 0\big)$;
d) Excluir os pontos $(-\frac{c_0}{b_0}, 0)$ e $(0, 0)$, pois nenhuma parábola passa por eles [símbolo $\circ$];
e) Posicionar $M[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$ [1, p. 41], com os eixos W e y alinhados.

Sejam $$a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4 < a_5 = \frac{b_0^2}{4c_0} < a_6 < a_7 < a_8. \tag{5}$$

De $x_V(a) \doteq x_{V_a} = -\frac{b_0}{2a}$ e (5), temos

$$x_{Va_3} < x_{Va_4} < \underbrace{-\frac{2c_0}{b_0}}_{x_{Va_5}} < x_{Va_6} < x_{Va_7} < x_{Va_8} < 0 < x_{Va_1} < x_{Va_2}. \tag{6}$$

De (3) e (6), temos

$$W_{Va_3} < W_{Va_4} < \underbrace{0}_{W_{Va_5}} < W_{Va_6} < W_{Va_7} < W_{Va_8} < c_0 < W_{Va_1} < W_{Va_2}. \tag{7}$$

Observe que $\lim\limits_{a\to\pm\infty} x_V(a) = 0$ e, definindo $W_V(a) = W_{V_a}$, $\lim\limits_{a\to\pm\infty} W_V(a) = c_0$.

f) Esbocemos o gráfico de F_{a_1}:
f.1) V_{a_1} está sobre a reta em (4) e de modo que: por (6), $0 < x_{Va_1}$; por (7), $c_0 < W_{Va_1}$.
f.2) F_{a_1} passa por $(0, c_0)$.
f.3) Como $a_1 < 0$, em e): a 1ª raiz ($r_{11} \doteq z_1(a_1)$) de f_{a_1} satisfaz $-\frac{c_0}{b_0} < r_{11} < 0$, e a 2ª ($r_{21} \doteq z_2(a_1)$) satisfaz $r_{21} > 0$. Logo, r_{11} e r_{21} são as raízes de F_{a_1}, com $r_{21} = 2x_{Va_1} - r_{11}$.

f.4) De (2): F_{a_1} é tangente a t em $(0, c_0)$.

g) Esbocemos o gráfico de F_{a_2}:
g.1) V_{a_2} está sobre a reta em (4) e de modo que: por (6), $x_{Va_1} < x_{Va_2}$; por (7), $W_{Va_1} < W_{Va_2}$.
g.2) De (1): $graf F_{a_2} \cap graf F_{a_1} = \{(0, c_0)\}$.
g.3) Da Proposição 1: F_{a_1} é interna a F_{a_2}.
g.4) Como $a_1 < a_2 < 0$, em e): a 1ª raiz ($r_{12} \doteq z_1(a_2)$) de f_{a_2} satisfaz $-\frac{c_0}{b_0} < r_{12} < r_{11}$, e a 2ª ($r_{22} \doteq z_2(a_2)$) satisfaz $r_{22} > r_{21}$. Logo, r_{12} e r_{22} são as raízes de F_{a_2}, com $r_{22} = 2x_{Va_2} - r_{12}$.
g.5) De (2): F_{a_2} é tangente a t em $(0, c_0)$.

h) Esbocemos o gráfico de F_{a_3}:
h.1) V_{a_3} está sobre a reta em (4) e de modo que: por (6), $x_{Va_3} < -\frac{2c_0}{b_0}$; por (7), $W_{Va_3} < 0$.
h.2) De (1): $graf F_{a_3} \cap graf F_{a_p} = \{(0, c_0)\},\ p = 1, 2$.
h.3) Como $0 < a_3 < \frac{b_0^2}{4c_0}$, em e): a 1ª raiz ($r_{13} \doteq z_1(a_3)$) de f_{a_3} satisfaz $-\frac{2c_0}{b_0} < r_{13} < -\frac{c_0}{b_0}$, e a 2ª ($r_{23} \doteq z_2(a_3)$) satisfaz $r_{23} < -\frac{2c_0}{b_0}$. Logo, r_{13} e r_{23} são as raízes de F_{a_3}, com $r_{23} = 2x_{Va_3} - r_{13}$.
h.4) De (2): F_{a_3} é tangente a t em $(0, c_0)$.

i) Esbocemos o gráfico de F_{a_4}:
i.1) V_{a_4} está sobre a reta em (4) e de modo que: por (6), $x_{Va_3} < x_{Va_4} < -\frac{2c_0}{b_0}$; por (7), $W_{Va_3} < W_{Va_4} < 0$.
i.2) Como $a_3 < a_4 < \frac{b_0^2}{4c_0}$, em e): a 1ª raiz ($r_{14} \doteq z_1(a_4)$) de f_{a_4} satisfaz $-\frac{2c_0}{b_0} < r_{14} < r_{13}$, e a 2ª ($r_{24} \doteq z_2(a_4)$) satisfaz $r_{23} < r_{24} < -\frac{2c_0}{b_0}$. Logo, r_{14} e r_{24} são as raízes de F_{a_4}, com $r_{24} = 2x_{Va_4} - r_{14}$.
i.3) De (1): $graf F_{a_4} \cap graf F_{a_p} = \{(0, c_0)\},\ p = 1, 2, 3$.
i.4) Da Proposição 2: F_{a_4} é interna a F_{a_3}.
i.5) De (2): F_{a_4} é tangente a t em $(0, c_0)$.

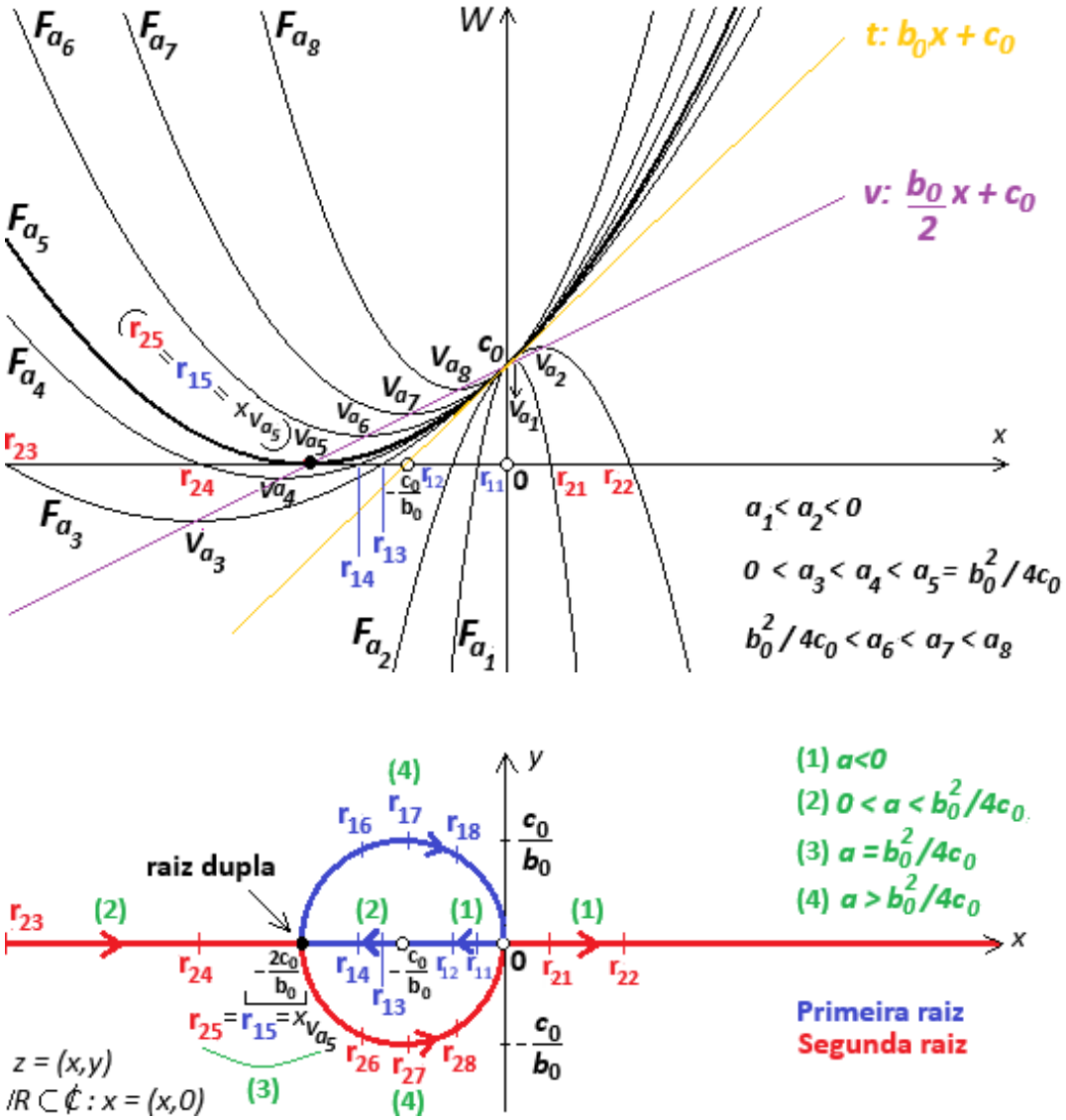
j) Esbocemos o gráfico de F_{a_5}:
j.1) Sobre a reta em (4): por (6) e (7), $V_{a_5} = (x_{Va_5}, W_{Va_5}) = \left(-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right)$.
j.2) De (1): $graf F_{a_5} \cap graf F_{a_p} = \{(0, c_0)\}, p = 1, 2, 3, 4$.
j.3) Da Proposição 2: F_{a_5} é interna a F_{a_4}.
j.4) Como $a_5 = \frac{b_0^2}{4c_0}$, em e): a 1ª raiz ($r_{15} \doteq z_1(a_5)$) e a 2ª ($r_{25} \doteq z_2(a_5)$) de f_{a_5} são $-\frac{2c_0}{b_0}$. Logo, r_{15} e r_{25} são as raízes de F_{a_5}.
j.5) De (2): F_{a_5} é tangente a t em $(0, c_0)$.

k) Esbocemos o gráfico de F_{a_6}:
k.1) V_{a_6} está sobre a reta em (4) e de modo que: por (6), $-\frac{2c_0}{b_0} < x_{Va_6} < 0$; por (7), $0 < W_{Va_6} < c_0$.
k.2) De (1): $graf F_{a_6} \cap graf F_{a_p} = \{(0, c_0)\},\ p = 1, 2, 3, 4, 5$.
k.3) Da Proposição 2: F_{a_6} é interna a F_{a_5} (e portanto não tem raízes reais).
k.4) De (2) F_{a_6} é tangente a t em $(0, c_0)$.

Obs.: Como $a_6 > \frac{b_0^2}{4c_0}$, em e): a 1ª raiz ($r_{16} \doteq z_1(a_6)$) de f_{a_6} e a 2ª ($r_{26} \doteq z_2(a_6)$), com $r_{26} = \bar{r}_{16}$ (par conjugado), satisfazem $-\frac{2c_0}{b_0} < \Re(r_{16}) = \Re(r_{26}) = -\frac{b_0}{2a_6} = x_{Va_6} < 0$, onde $\Re$ é a parte real. A vertical ao eixo x por $x_{Va_6} = -\frac{b_0}{2a_6}$ corta a semicircunferência superior em r_{16} e a inferior em r_{26}.

Os esboços dos gráficos de F_{a_7} e de F_{a_8} seguem o mesmo raciocínio do gráfico de F_{a_6}.

Figura 1: A *representação-*$F_a M[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$

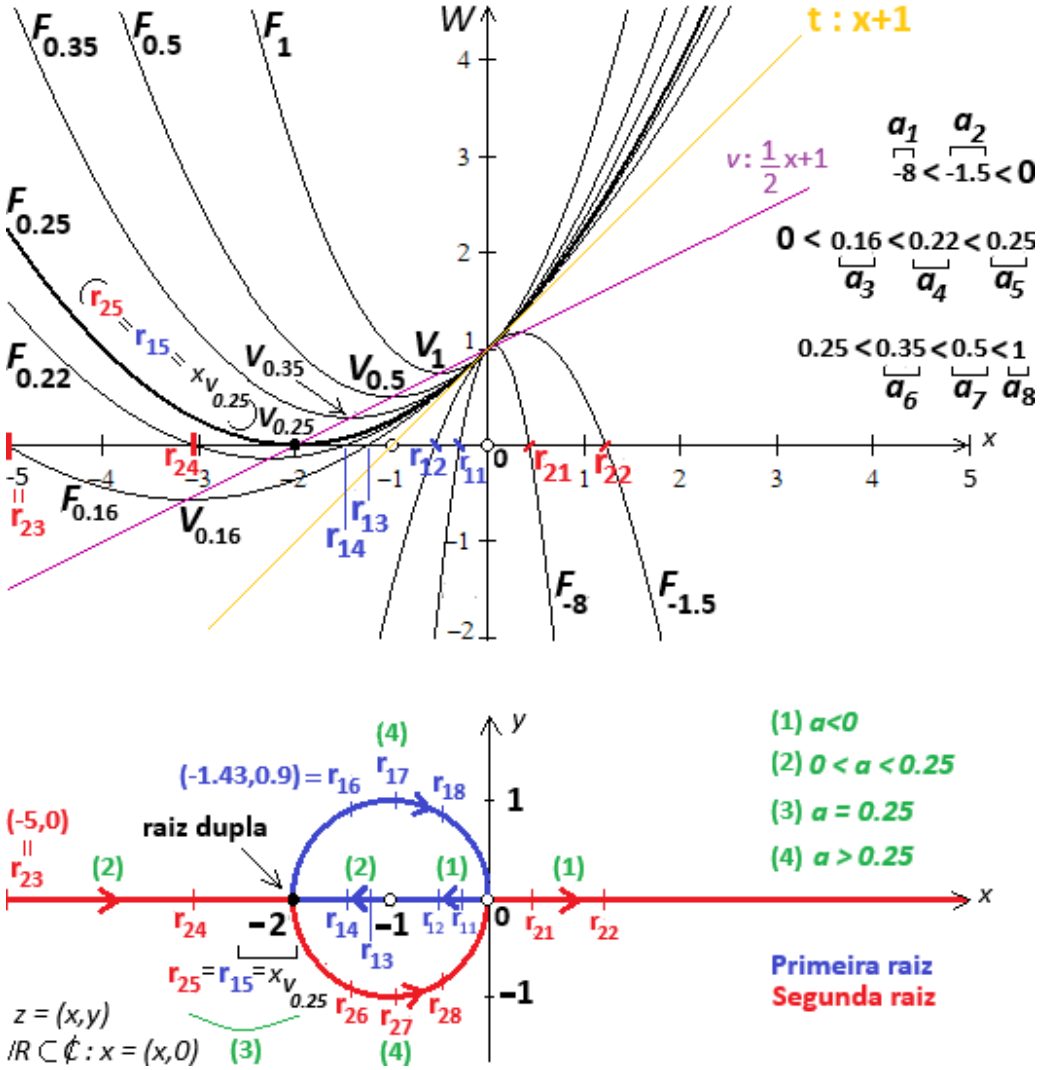


Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4 < a_5 = b_0^2/4c_0 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0, c_0)$) são, resp., $F_{a_1} \to F_{a_2} \to F_{a_3} \to F_{a_4} \to F_{a_5} \to F_{a_6} \to F_{a_7} \to F_{a_8}$, e seus respectivos vértices (sobre a reta v) são $V_{a_1} \to V_{a_2} \to V_{a_3} \to V_{a_4} \to V_{a_5} \to V_{a_6} \to V_{a_7} \to V_{a_8}$. Para $a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4 < a_5 = b_0^2/4c_0$, as raízes reais de $F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}, F_{a_4}, F_{a_5}$ satisfazem, resp.: $r_{11} \to r_{12} \to r_{13} \to r_{14} \to r_{15}$ [1ª raiz] e $r_{21} \to r_{22} \to r_{23} \to r_{24} \to r_{25}$ [2ª raiz]. Para $b_0^2/4c_0 < a_6 < a_7 < a_8$, as 3 perpendiculares aos eixos x passando cada uma por $V_{a_6}, V_{a_7}, V_{a_8}$ interceptam a semicircunferência superior, resp., em r_{16}, r_{17}, r_{18}, e a inferior, resp., em r_{26}, r_{27}, r_{28}. Para $0 < a < b_0^2/4c_0$, ambas as raízes reais de f_a (as mesmas de F_a) seguem uma de encontro à outra; para $a = b_0^2/4c_0$, elas se encontram formando a raiz dupla (abscissa do vértice de $F_{b_0^2/4c_0}$) $-2c_0/b_0$; para $a > b_0^2/4c_0$, ambas as raízes de f_a seguem sobre as semicircunferências em pares conjugados complexos, ao passo que as raízes reais de F_a deixam de existir. Observe: quando $a \to -\infty$, a parábola F_a (com concavidade para baixo) vai se fechando e suas 2 raízes reais (que são as de f_a) vão se aproximando, sobre o eixo real x, de 0 (exceto 0); quando $a \to +\infty$, a parábola F_a (com concavidade para cima e que não tem raízes reais) vai se fechando, enquanto as 2 raízes complexas conjugadas de f_a vão se aproximando, sobre os arcos da circunferência, de 0 (exceto 0); quando $a \to \pm\infty$, o vértice de F_a se aproxima arbitrariamente de $(0, c_0)$ [exceto $(0, c_0)$]. Tomamos $c_0/b_0 = c_0$ para que tenhamos uma visão mais ampla dos gráficos; se $c_0/b_0 << c_0$, a circunferência fica muito pequena para ser visualizada; se $c_0/b_0 >> c_0$, a visualização das parábolas fica prejudicada.

Exemplificamos esta construção com a Figura 2.

Figura 2: A *representação-$F_a M[(b_0 = 1, c_0 = 1)]$*



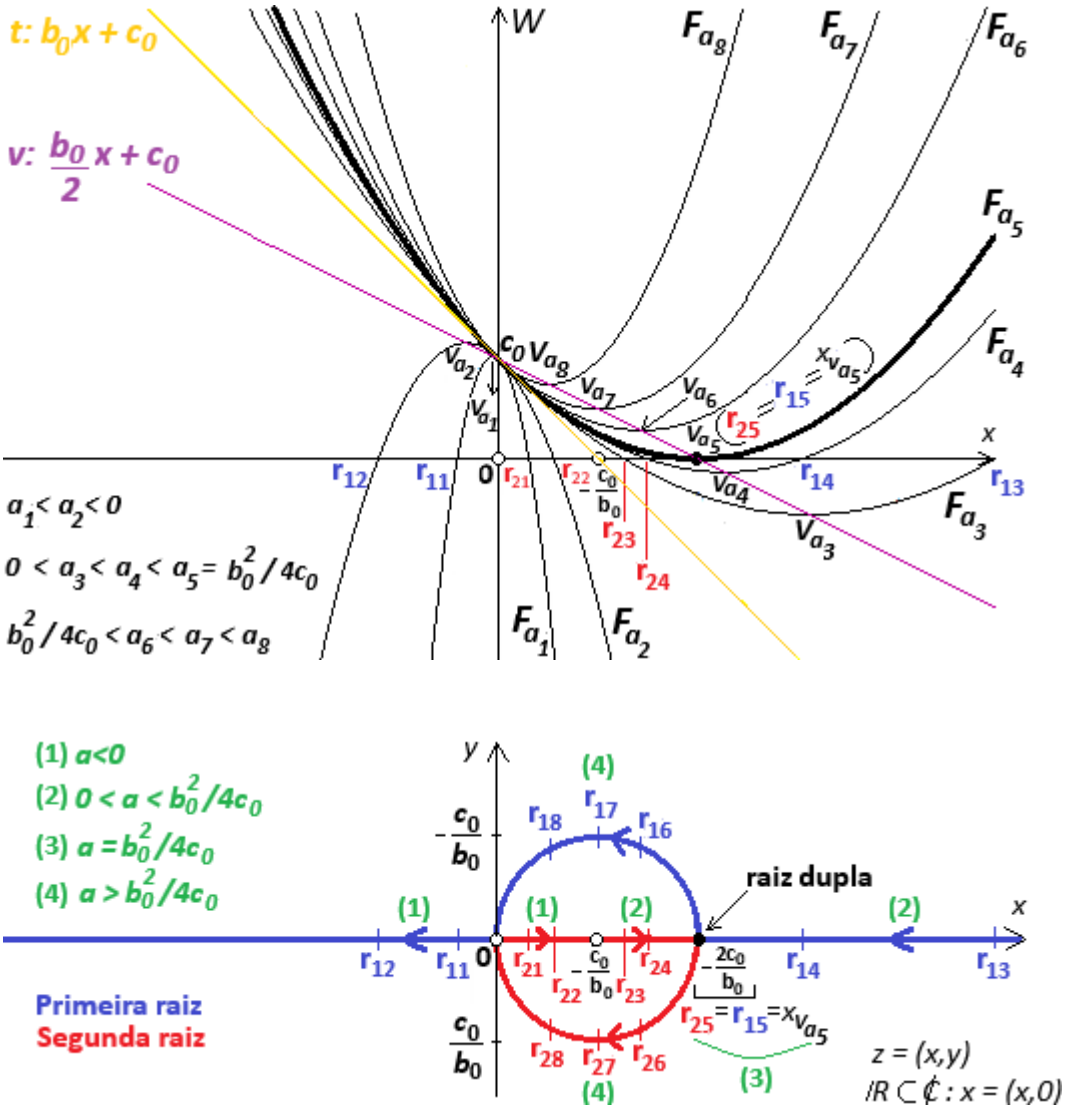
Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $-8 < -1.5 < 0.16 < 0.22 < 0.25 < 0.35 < 0.5 < 1$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0,1)$) são, resp., $F_{-8} \to F_{-1.5} \to F_{0.16} \to F_{0.22} \to F_{0.25} \to F_{0.35} \to F_{0.5} \to F_1$. As raízes reais de $F_{-8}, F_{-1.5}, F_{0.16}, F_{0.22}, F_{0.25}$ satisfazem, resp.: $r_{11} \approx -0.3 \to r_{12} \approx -0.55 \to r_{13} = -1.25 \to r_{14} \approx -1.49 \to r_{15} = -2$ [1ª raiz] e $r_{21} \approx 0.42 \to r_{22} \approx 1.21 \to r_{23} = -5 \to r_{24} \approx -3.06 \to r_{25} = -2$ [2ª raiz]. Para $0.25 < 0.35 < 0.5 < 1$, as 3 perpendiculares aos eixos x passando cada uma por $V_{0.35}, V_{0.5}, V_1$ interceptam a semicircunferência superior, resp., em $r_{16} \approx -1.43 + 0.9i$ $((-1.43, 0.9))$, $r_{17} = -1 + i$ $((-1,1))$, $r_{18} \approx -0.5 + 0.87i$ $((-0.5, 0.87))$, e a inferior, resp., em $r_{26} \approx -1.43 - 0.9i$ $((-1.43, -0.9))$, $r_{27} = -1 - i$ $((-1,-1))$, $r_{28} \approx -0.5 - 0.87i$ $((-0.5, -0.87))$. Para $0 < a < 0.25$, ambas as raízes reais de f_a (as mesmas de F_a) seguem uma de encontro à outra; para $a = 0.25$, elas se encontram formando a raiz dupla (abscissa do vértice de $F_{0.25}$) -2; para $a > 0.25$, ambas as raízes de f_a seguem sobre as semicircunferências em pares conjugados complexos, ao passo que as raízes reais de F_a deixam de existir.

2) A *representação-$F_a M[(b_0 < 0, c_0 > 0)]$*

A construção é similar e está representada na Figura 3. Utilizamos as Proposições 3 e 4 (subseção 3.1). $M[(b_0 < 0, c_0 > 0)]$ é uma cortesia de [2, p. 5]. A primeira e a segunda raízes de f_{a_p} são, respectivamente, r_{1p} e r_{2p}, $p = 1, ..., 8$.

Figura 3: A *representação-*$F_a M[(b_0 < 0, c_0 > 0)]$



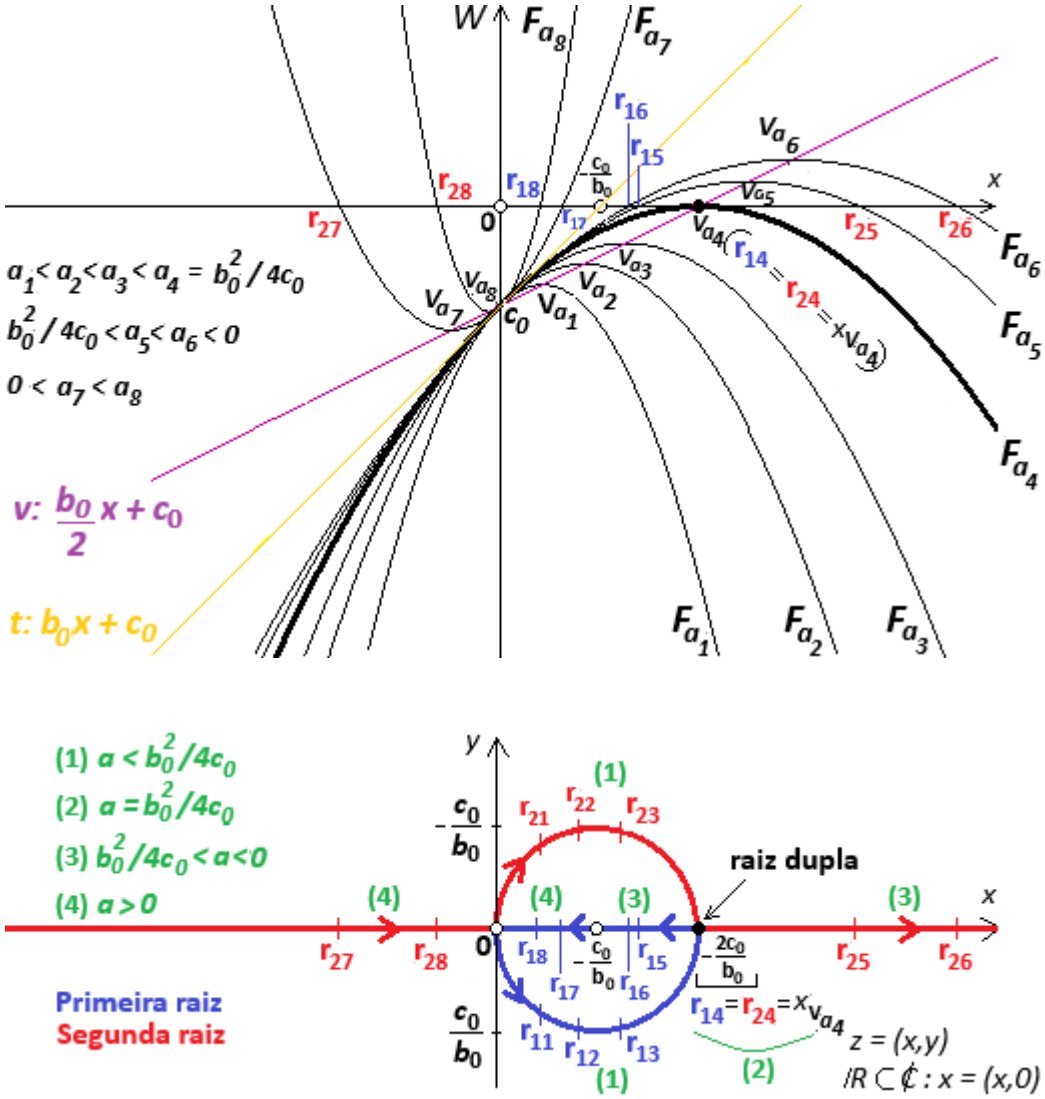
Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4 < a_5 = b_0^2/4c_0 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0, c_0)$) são, resp., $F_{a_1} \to F_{a_2} \to F_{a_3} \to F_{a_4} \to F_{a_5} \to F_{a_6} \to F_{a_7} \to F_{a_8}$, e seus respectivos vértices (sobre a reta v) são $V_{a_1} \to V_{a_2} \to V_{a_3} \to V_{a_4} \to V_{a_5} \to V_{a_6} \to V_{a_7} \to V_{a_8}$. Para $a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4 < a_5 = b_0^2/4c_0$, as raízes reais de $F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}, F_{a_4}, F_{a_5}$ satisfazem, resp.: $r_{11} \to r_{12} \to r_{13} \to r_{14} \to r_{15}$ [1ª raiz] e $r_{21} \to r_{22} \to r_{23} \to r_{24} \to r_{25}$ [2ª raiz]. Para $b_0^2/4c_0 < a_6 < a_7 < a_8$, as 3 perpendiculares aos eixos x passando cada uma por $V_{a_6}, V_{a_7}, V_{a_8}$ interceptam a semicircunferência superior, resp., em r_{16}, r_{17}, r_{18}, e a inferior, resp., em r_{26}, r_{27}, r_{28}. Observe: quando $a \to -\infty$, a parábola F_a (com concavidade para baixo) vai se fechando e suas 2 raízes reais (que são as de f_a) vão se aproximando, sobre o eixo real x, de 0 (exceto 0); quando $a \to +\infty$, a parábola F_a (com concavidade para cima e que não tem raízes reais) vai se fechando, enquanto as 2 raízes complexas conjugadas de f_a vão se aproximando, sobre os arcos da circunferência, de 0 (exceto 0); quando $a \to \pm\infty$, o vértice de F_a se aproxima arbitrariamente de $(0, c_0)$ [exceto $(0, c_0)$]. Tomamos $|c_0/b_0| = c_0$ para que tenhamos uma visão mais ampla dos gráficos; se $|c_0/b_0| << c_0$, a circunferência fica muito pequena para ser visualizada; se $|c_0/b_0| >> c_0$, a visualização das parábolas fica prejudicada.

3) A *representação-*$F_a M[(b_0 > 0, c_0 < 0)]$

A construção está na Figura 4. Usamos as Proposições 1 e 2 (subseção 3.1). [2, p. 5] nos cedeu $M[(b_0 > 0, c_0 < 0)]$. A 1ª e a 2ª raízes de f_{a_p} são, respectivamente, r_{1p} e r_{2p}, $p = 1, ..., 8$.

Figura 4: A *representação-*$F_a M[(b_0 > 0, c_0 < 0)]$



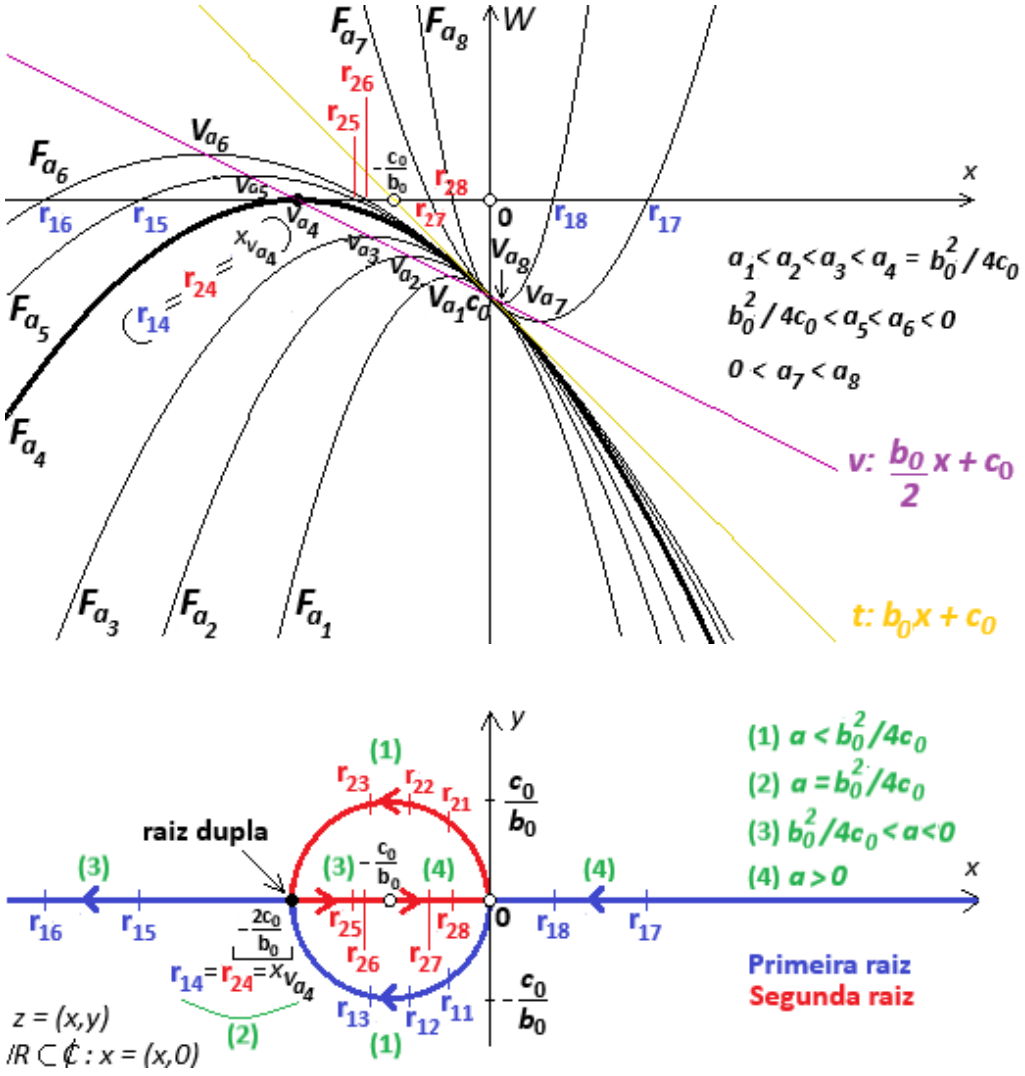
Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = b_0^2/4c_0 < a_5 < a_6 < 0 < a_7 < a_8$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0, c_0)$) são, resp., $F_{a_1} \to F_{a_2} \to F_{a_3} \to F_{a_4} \to F_{a_5} \to F_{a_6} \to F_{a_7} \to F_{a_8}$, e seus respectivos vértices (sobre a reta v) são $V_{a_1} \to V_{a_2} \to V_{a_3} \to V_{a_4} \to V_{a_5} \to V_{a_6} \to V_{a_7} \to V_{a_8}$. Para $a_1 < a_2 < a_3 < b_0^2/4c_0$, as 3 perpendiculares aos eixos x passando cada uma por $V_{a_1}, V_{a_2}, V_{a_3}$ interceptam a semicircunferência superior, resp., em r_{21}, r_{22}, r_{23}, e a inferior, resp., em r_{11}, r_{12}, r_{13}. Para $a_4 = b_0^2/4c_0 < a_5 < a_6 < 0 < a_7 < a_8$, as raízes reais de $F_{a_4}, F_{a_5}, F_{a_6}, F_{a_7}, F_{a_8}$ satisfazem, resp.: $r_{14} \to r_{15} \to r_{16} \to r_{17} \to r_{18}$ [1ª raiz] e $r_{24} \to r_{25} \to r_{26} \to r_{27} \to r_{28}$ [2ª raiz]. Para $a < b_0^2/4c_0$, ambas as raízes de f_a vão uma de encontro à outra sobre as semicircunferências em pares conjugados complexos, ao passo que as raízes reais de F_a não existem; para $a = b_0^2/4c_0$, ambas raízes de f_a se encontram formando a raiz dupla (abscissa do vértice de $F_{b_0^2/4c_0}$) $-2c_0/b_0$; para $b_0^2/4c_0 < a < 0$, ambas as raízes reais de f_a (as mesmas de F_a) se afastam uma da outra. Observe: quando $a \to -\infty$, a parábola F_a (com concavidade para baixo e que não tem raízes reais) vai se fechando, enquanto as 2 raízes complexas conjugadas de f_a vão se aproximando, sobre os arcos da circunferência, de 0 (exceto 0); quando $a \to +\infty$, a parábola F_a (com concavidade para cima) vai se fechando e suas 2 raízes reais (que são as de f_a) vão se aproximando, sobre o eixo real x, de 0 (exceto 0); quando $a \to \pm\infty$, o vértice de F_a se aproxima arbitrariamente de $(0, c_0)$ [exceto $(0, c_0)$]. Tomamos $|c_0/b_0| = |c_0|$ para que tenhamos uma visão mais ampla dos gráficos; se $|c_0/b_0| << |c_0|$, a circunferência fica muito pequena para ser visualizada; se $|c_0/b_0| >> |c_0|$, a visualização das parábolas fica prejudicada.

4) A *representação-*$F_aM[(b_0 < 0, c_0 < 0)]$

A construção está na Figura 5. Usamos as Proposições 3 e 4 (subseção 3.1). [1, p. 43] nos cedeu $M[(b_0 < 0, c_0 < 0)]$. A 1ª e a 2ª raízes de f_{a_p} são, resp., r_{1p} e r_{2p}, $p = 1, ..., 8$.

Figura 5: A *representação-*$F_aM[(b_0 < 0, c_0 < 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = b_0^2/4c_0 < a_5 < a_6 < 0 < a_7 < a_8$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0, c_0)$) são, resp., $F_{a_1} \to F_{a_2} \to F_{a_3} \to F_{a_4} \to F_{a_5} \to F_{a_6} \to F_{a_7} \to F_{a_8}$, e seus respectivos vértices (sobre a reta v) são $V_{a_1} \to V_{a_2} \to V_{a_3} \to V_{a_4} \to V_{a_5} \to V_{a_6} \to V_{a_7} \to V_{a_8}$. Para $a_1 < a_2 < a_3 < b_0^2/4c_0$, as 3 perpendiculares aos eixos x passando cada uma por $V_{a_1}, V_{a_2}, V_{a_3}$ interceptam a semicircunferência superior, resp., em r_{21}, r_{22}, r_{23}, e a inferior, resp., em r_{11}, r_{12}, r_{13}. Para $a_4 = b_0^2/4c_0 < a_5 < a_6 < 0 < a_7 < a_8$, as raízes reais de $F_{a_4}, F_{a_5}, F_{a_6}, F_{a_7}, F_{a_8}$ satisfazem, resp.: $r_{14} \to r_{15} \to r_{16} \to r_{17} \to r_{18}$ [1ª raiz] e $r_{24} \to r_{25} \to r_{26} \to r_{27} \to r_{28}$ [2ª raiz]. Observe: quando $a \to -\infty$, a parábola F_a (com concavidade para baixo e que não tem raízes reais) vai se fechando, enquanto as 2 raízes complexas conjugadas de f_a vão se aproximando, sobre os arcos da circunferência, de 0 (exceto 0); quando $a \to +\infty$, a parábola F_a (com concavidade para cima) vai se fechando e suas 2 raízes reais (que são as de f_a) vão se aproximando, sobre o eixo real x, de 0 (exceto 0); quando $a \to \pm\infty$, o vértice de F_a se aproxima arbitrariamente de $(0, c_0)$ [exceto $(0, c_0)$]. Tomamos $c_0/b_0 = |c_0|$ para que tenhamos uma visão mais ampla dos gráficos; se $c_0/b_0 << |c_0|$, a circunferência fica muito pequena para ser visualizada; se $c_0/b_0 >> |c_0|$, a visualização das parábolas fica prejudicada.

5) A *representação-$F_aM[(b_0 = 0, c_0 > 0)]$*

Fixado $c_0 > 0$, para cada $a \in \mathbb{R}^*$, seja $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_a(x) = ax^2 + c_0$. Sabemos que

$$graf\ F_\alpha \cap graf\ F_\beta = \{(0, c_0)\} \quad \text{para } \alpha \neq \beta. \tag{8}$$

$$\text{Para cada } a \in \mathbb{R}^*, \text{ a reta } t : W = F_a'(0)x + c_0 = c_0 \text{ é tangente a } F_a \text{ em } (0, c_0). \tag{9}$$

$$\text{Para cada } a \in \mathbb{R}^*, F_a \text{ tem vértice } V_a = (0, c_0). \tag{10}$$

Procedemos à construção da *representação-$F_aM[(b_0 = 0, c_0 > 0)]$* (Figura 6):
a) Traçar o sistema de coordenadas cartesianas xOW;
b) Traçar a reta t: $W = c_0$;
c) Excluir o ponto $(0, 0)$, pois nenhuma parábola passa por ele [símbolo $\circ$];
d) Posicionar $M[(b_0 = 0, c_0 > 0)]$ [2, p. 8], com os eixos W e y alinhados.

Sejam $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$.

e) Esbocemos o gráfico de F_{a_1}:
e.1) De (10): F_{a_1} tem vértice $V_{a_1} = (0, c_0)$.
e.2) Como $a_1 < 0$, em d): a 1ª raiz de f_{a_1} é $r_{11}(\doteq z_1(a_1)) < 0$, e a 2ª raiz de f_{a_1} é $r_{21}(\doteq z_2(a_1)) > 0$, com $r_{21} = -r_{11}$ (veja (18)). Logo, r_{11} e r_{21} são as raízes de F_{a_1}.
e.3) De (9): F_{a_1} é tangente a t em $(0, c_0)$.

f) Esbocemos o gráfico de F_{a_2}:
f.1) De (10): F_{a_2} tem vértice $V_{a_2} = (0, c_0)$.
f.2) De (8): $graf\ F_{a_2} \cap graf\ F_{a_1} = \{(0, c_0)\}$; da Proposição 5: F_{a_1} é interna a F_{a_2}.
f.3) Como $a_1 < a_2 < 0$, em d): a 1ª raiz de f_{a_2} é $r_{12}(\doteq z_1(a_2)) < r_{11}$, e a 2ª raiz de f_{a_2} é $r_{22}(\doteq z_2(a_2)) > r_{21}$, com $r_{22} = -r_{12}$. Logo, r_{12} e r_{22} são as raízes de F_{a_2}.
f.4) De (9): F_{a_2} é tangente a t em $(0, c_0)$.

Os esboços dos gráficos de F_{a_3} e de F_{a_4} seguem o mesmo raciocínio do gráfico de F_{a_2}.

g) Esbocemos o gráfico de F_{a_5}:
g.1) De (10): F_{a_5} tem vértice $V_{a_5} = (0, c_0)$.
g.2) De (8): $graf\ F_{a_5} \cap graf\ F_{a_p} = \{(0, c_0)\},\ p = 1, 2, 3, 4$.
g.3) Como $a_5 > 0$, F_{a_5} tem concavidade para cima (e portanto não tem raízes reais);
g.4) De (9): F_{a_5} é tangente a t em $(0, c_0)$.
Obs.: Como $a_5 > 0$, em d): a 1ª raiz $(r_{15} \doteq z_1(a_5))$ de f_{a_5} está sobre o eixo y $(\Im(r_{15}) > 0)$, e a 2ª raiz $(r_{25} \doteq z_2(a_5))$ de f_{a_5} também $(\Im(r_{25}) < 0)$, com $r_{25} = -r_{15}$ (veja (19)), onde $\Im$ denota a parte imaginária. r_{15} e r_{25} não aparecem no eixo y da *representação-M* da Figura 6.

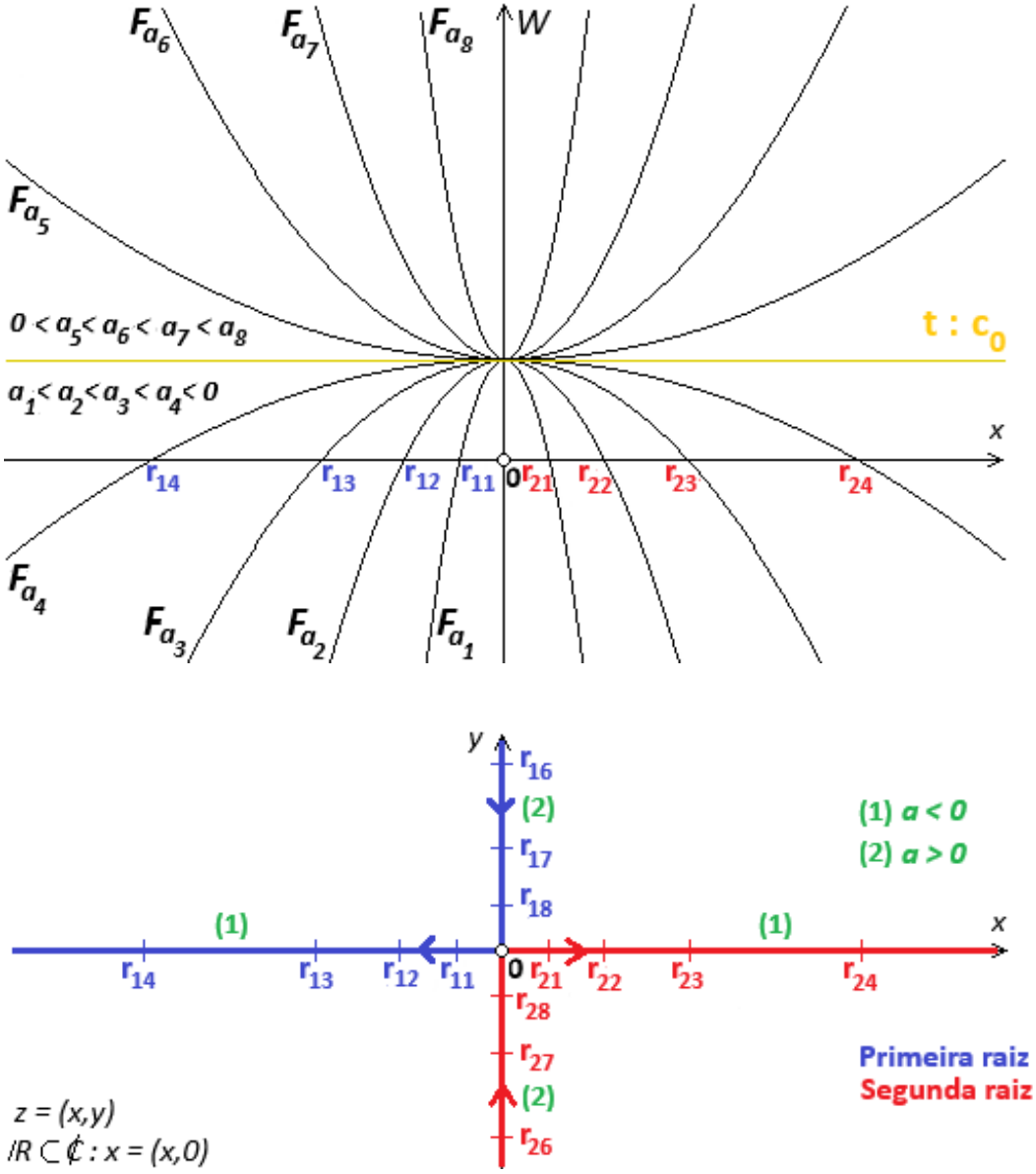
h) Esbocemos o gráfico de F_{a_6}:
h.1) De (10): F_{a_6} tem vértice $V_{a_6} = (0, c_0)$.
h.2) De (8): $graf\ F_{a_6} \cap graf\ F_{a_p} = \{(0, c_0)\},\ p = 1, 2, 3, 4, 5$; da Proposição 6: F_{a_6} é interna a F_{a_5}.
h.3) Como $a_6 > 0$, F_{a_6} tem concavidade para cima (e portanto não tem raízes reais).

h.4) De (9): F_{a_6} é tangente a t em $(0, c_0)$.

Obs.: Como $a_6 > a_5$, em d): a 1ª raiz ($r_{16} \doteq z_1(a_6)$) de f_{a_6} está sobre o eixo y ($\Im(r_{15}) > \Im(r_{16}) > 0$), e a 2ª raiz ($r_{26} \doteq z_2(a_6)$) de f_{a_6} também ($\Im(r_{25}) < \Im(r_{26}) < 0$), com $r_{26} = -r_{16}$.

Os esboços dos gráficos de F_{a_7} e de F_{a_8} seguem o mesmo raciocínio do gráfico de F_{a_6}.

Figura 6: A *representação-F_aM*[$(b_0 = 0, c_0 > 0)$]

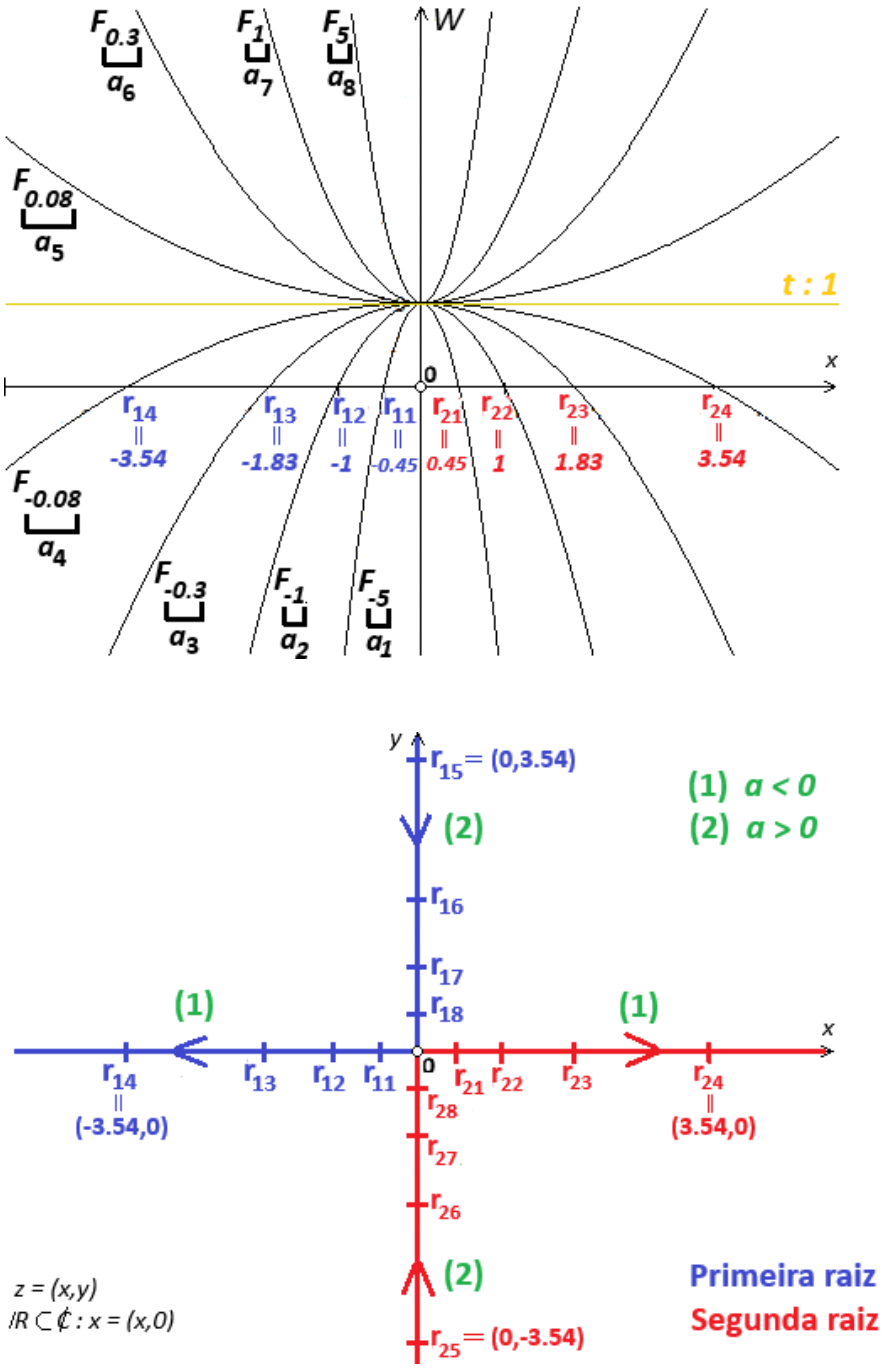


Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0, c_0)$) são, resp., $F_{a_1} \to F_{a_2} \to F_{a_3} \to F_{a_4} \to F_{a_5} \to F_{a_6} \to F_{a_7} \to F_{a_8}$, e seus respectivos vértices são $(0, c_0)$. Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0$, as parábolas $F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}, F_{a_4}$ vão se abrindo e concomitantemente suas raízes reais vão se afastando de 0 sobre o eixo real x: $r_{11} \to r_{12} \to r_{13} \to r_{14}$ [1ª raiz] e $r_{21} \to r_{22} \to r_{23} \to r_{24}$ [2ª raiz]. Para $0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas $F_{a_5}, F_{a_6}, F_{a_7}, F_{a_8}$, que não têm raízes reais, vão se fechando. [Veja a subseção 3.2.]

Exemplificamos esta construção com a Figura 7.

Figura 7: A *representação-*$F_a M[(b_0 = 0, c_0 = 1)]$



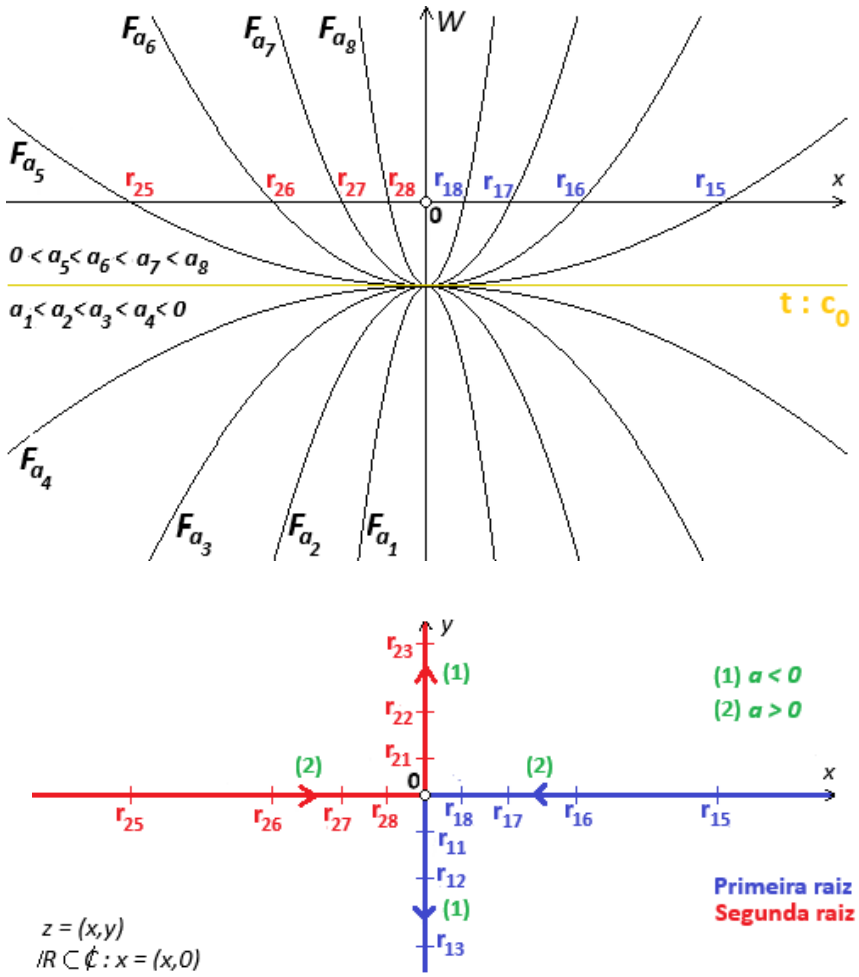
Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $-5 < -1 < -0.3 < -0.08 < 0 < 0.08 < 0.3 < 1 < 5$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0,1)$) são, resp., $F_{-5} \to F_{-1} \to F_{-0.3} \to F_{-0.08} \to F_{0.08} \to F_{0.3} \to F_1 \to F_5$, e seus respectivos vértices são $(0,1)$. As raízes reais de $F_{-5}, F_{-1}, F_{-0.3}, F_{-0.08}$ satisfazem, resp.: $r_{11} \approx -0.45 \to r_{12} = -1 \to r_{13} \approx -1.83 \to r_{14} \approx -3.54$ [1ª raiz] e $r_{21} \approx 0.45 \to r_{22} = 1 \to r_{23} \approx 1.83 \to r_{24} \approx 3.54$ [2ª raiz]. Para $0 < 0.08 < 0.3 < 1 < 5$, as parábolas $F_{0.08}, F_{0.3}, F_1, F_5$ vão se fechando e concomitantemente as 2 raízes complexas conjugadas de $f_{0.08}, f_{0.3}, f_1, f_5$ vão se aproximando de 0 sobre o eixo imaginário y: $r_{15} \approx 3.54i$ $((0, 3.54)) \to r_{16} \approx 1.83i$ $((0, 1.83)) \to r_{17} = i$ $((0,1)) \to r_{18} \approx 0.45i$ $((0, 0.45))$ [1ª raiz] e $r_{25} \approx -3.54i$ $((0, -3.54)) \to r_{26} \approx -1.83i$ $((0, -1.83)) \to r_{27} = -i$ $((0,-1)) \to r_{28} \approx -0.45i$ $((0, -0.45))$ [2ª raiz].

6) A *representação-*$F_aM[(b_0 = 0, c_0 < 0)]$

A construção está na Figura 8. Usamos as Proposições 5 e 6 (subseção 3.1). [2, p. 8] nos cedeu $M[(b_0 = 0, c_0 < 0)]$. A 1ª e a 2ª raízes de f_{a_p} são, resp., r_{1p} e r_{2p}, $p = 1, ..., 8$.

Figura 8: A *representação-*$F_aM[(b_0 = 0, c_0 < 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0, c_0)$) são, resp., $F_{a_1} \to F_{a_2} \to F_{a_3} \to F_{a_4} \to F_{a_5} \to F_{a_6} \to F_{a_7} \to F_{a_8}$, e seus respectivos vértices são $(0, c_0)$. Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0$, as parábolas $F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}, F_{a_4}$ vão se abrindo e concomitantemente as 2 raízes complexas conjugadas de $f_{a_1}, f_{a_2}, f_{a_3}, f_{a_4}$ vão se afastando de 0 sobre o eixo imaginário y: $r_{11} \to r_{12} \to r_{13} \to r_{14}$ [1ª raiz] e $r_{21} \to r_{22} \to r_{23} \to r_{24}$ [2ª raiz]. (r_{14} e r_{24} não aparecem no eixo y da *representação-M*.) Para $0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas $F_{a_5}, F_{a_6}, F_{a_7}, F_{a_8}$ vão se fechando e concomitantemente suas raízes reais vão se aproximando de 0 sobre o eixo real x: $r_{15} \to r_{16} \to r_{17} \to r_{18}$ [1ª raiz] e $r_{25} \to r_{26} \to r_{27} \to r_{28}$ [2ª raiz]. Note: quando $a \to -\infty$, a parábola F_a (com concavidade para baixo e que não tem raízes reais) vai se fechando, enquanto as 2 raízes complexas conjugadas de f_a vão se aproximando, sobre o eixo imaginário y, de 0 (exceto 0); quando $a \to +\infty$, a parábola F_a (com concavidade para cima) vai se fechando e suas 2 raízes reais (que são as de f_a) vão se aproximando, sobre o eixo real x, de 0 (exceto 0).

7) A *representação-*$F_aM[(b_0 > 0, c_0 = 0)]$

Fixado $b_0 > 0$, para cada $a \in \mathbb{R}^*$, seja $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_a(x) = ax^2 + b_0x$. Sabemos que

$$graf\ F_\alpha \cap graf\ F_\beta = \{(0, c_0)\} \quad \text{para} \quad \alpha \neq \beta. \tag{11}$$

Para cada $a \in \mathbb{R}^*$, a reta $t : W = b_0 x$, em que $b_0 = F'_a(0)$, é tangente a F_a em $(0,0)$. (12)

Para cada $a \in \mathbb{R}^*$, F_a tem vértice $V_a = (x_{V_a}, W_{V_a})$, onde $W_{V_a} = (b_0/2)x_{V_a}$, isto é, (13)

V_a está sobre a reta $v : W = (b_0/2)x$, exceto em $(0,0)$. (14)

Procedemos à construção da *representação-$F_a M[(b_0 > 0, c_0 = 0)]$* (Figura 9):
a) Traçar o sistema de coordenadas cartesianas xOW;
b) Traçar a reta v: $W = \frac{b_0}{2}x$ passando por $(0,0)$;
c) Traçar a reta t: $W = b_0 x$ passando por $(0,0)$;
d) Posicionar $M[(b_0 > 0, c_0 = 0)]$ [2, p. 9], com os eixos W e y alinhados.

Sejam $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$. (15)

De $x_V(a) \doteq x_{V_a} = -\frac{b_0}{2a}$ e (15), temos

$$x_{Va_5} < x_{Va_6} < x_{Va_7} < x_{Va_8} < 0 < x_{Va_1} < x_{Va_2} < x_{Va_3} < x_{Va_4}. \quad (16)$$

De (13) e (16), temos

$$W_{Va_5} < W_{Va_6} < W_{Va_7} < W_{Va_8} < 0 < W_{Va_1} < W_{Va_2} < W_{Va_3} < W_{Va_4}. \quad (17)$$

Observe que $\lim_{a\to\pm\infty} x_V(a) = 0$ e, definindo $W_V(a) = W_{V_a}$, $\lim_{a\to\pm\infty} W_V(a) = 0$.

e) Esbocemos o gráfico de F_{a_1}:
e.1) V_{a_1} está sobre a reta em (14) e: por (16), $0 < x_{Va_1}$; por (17), $0 < W_{Va_1}$.
e.2) Como $a_1 < 0$, em d): a 1ª raiz de f_{a_1} é $r_{11}(\doteq z_1(a_1)) = 0$, e a 2ª raiz de f_{a_1} é $r_{21}(\doteq z_2(a_1)) > 0$. Logo, $r_{11} = 0$ e $r_{21} > 0$ são as raízes de F_{a_1}, com $r_{21} = 2x_{Va_1}$.
e.3) De (12): F_{a_1} é tangente a t em $(0,0)$.

f) Esbocemos o gráfico de F_{a_2}:
f.1) V_{a_2} está sobre a reta em (14) e: por (16), $x_{Va_1} < x_{Va_2}$; por (17), $W_{Va_1} < W_{Va_2}$.
f.2) De (11): $graf\ F_{a_2} \cap graf\ F_{a_1} = \{(0, c_0)\}$; da Proposição 1: F_{a_1} é interna a F_{a_2}.
f.3) Como $a_1 < a_2 < 0$, em d): a 1ª raiz de f_{a_2} é $r_{12}(\doteq z_1(a_2)) = 0$, e a 2ª raiz de f_{a_2} é $r_{22}(\doteq z_2(a_2)) > r_{21}$. Logo, $r_{12} = 0$ e r_{22} são as raízes de F_{a_2}, com $r_{22} = 2x_{Va_2}$.
f.4) De (12): F_{a_2} é tangente a t em $(0,0)$.

Os esboços dos gráficos de F_{a_3} e de F_{a_4} seguem o mesmo raciocínio do gráfico de F_{a_2}.

g) Esbocemos o gráfico de F_{a_5}:
g.1) V_{a_5} está sobre a reta em (14) e: por (16), $x_{Va_5} < 0$; por (17), $W_{Va_5} < 0$.
g.2) De (11): $graf\ F_{a_5} \cap graf\ F_{a_p} = \{(0, c_0)\}, p = 1, 2, 3, 4$.
g.3) Como $a_5 > 0$, em d): a 1ª raiz de f_{a_5} é $r_{15}(\doteq z_1(a_5)) = 0$, e a 2ª raiz de f_{a_5} é $r_{25}(\doteq z_2(a_5)) < 0$. Logo, $r_{15} = 0$ e r_{25} são as raízes de F_{a_5}, com $r_{25} = 2x_{Va_5}$.
g.4) De (12): F_{a_5} é tangente a t em $(0,0)$.

h) Esbocemos o gráfico de F_{a_6}:
h.1) V_{a_6} está sobre a reta em (14) e: por (16), $x_{Va_5} < x_{Va_6} < 0$; por (17), $W_{Va_5} < W_{Va_6} < 0$.

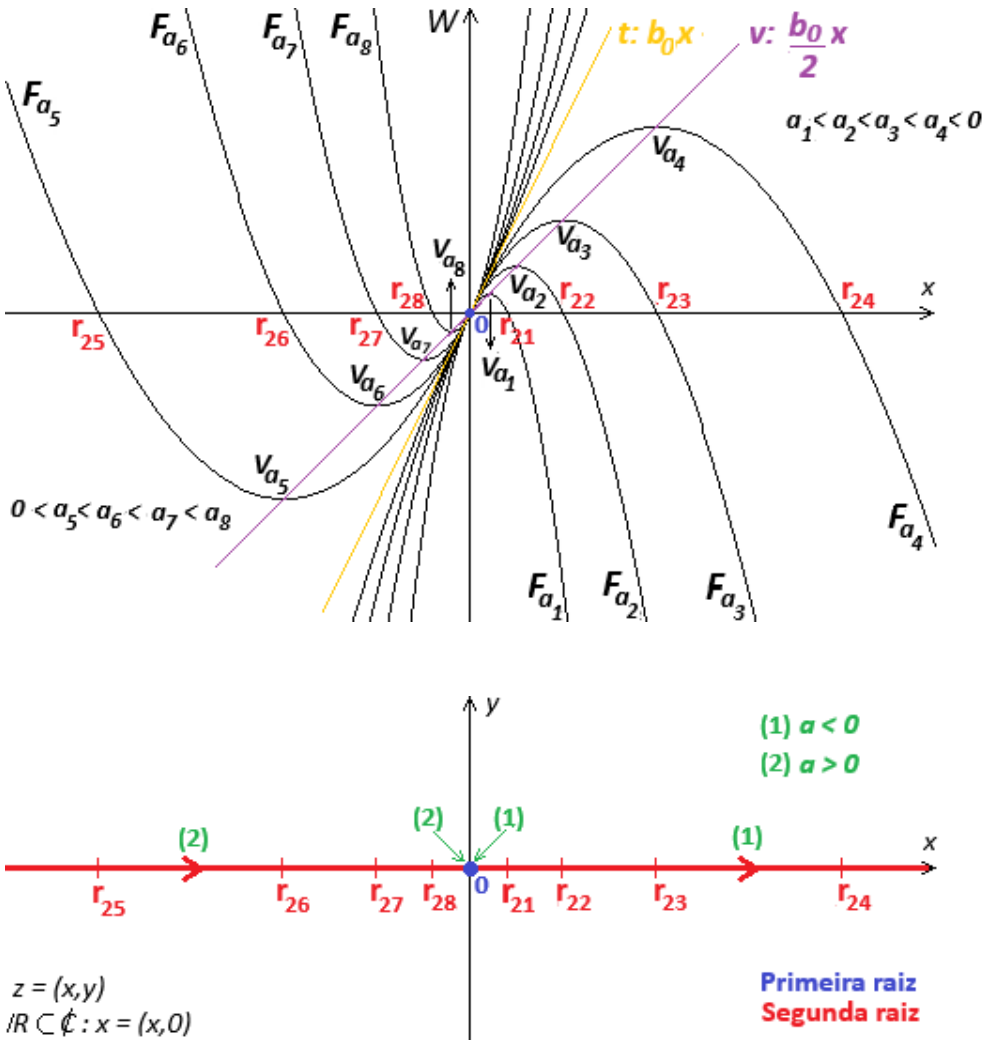
h.2) De (11): $graf\ F_{a_6} \cap graf\ F_{a_p} = \{(0, c_0)\},\ p = 1, 2, 3, 4, 5$; da Proposição 2: F_{a_6} é interna a F_{a_5}.

h.3) Como $a_6 > a_5 > 0$, em d): a 1ª raiz de f_{a_6} é $r_{16}(\doteq z_1(a_6)) = 0$, e a 2ª raiz de f_{a_6} é tal que $r_{25} < r_{26}(\doteq z_2(a_6)) < 0$. Logo, $r_{16} = 0$ e r_{26} são as raízes de F_{a_6}, com $r_{26} = 2x_{Va_6}$.

h.4) De (12): F_{a_6} é tangente a t em $(0, 0)$.

Os esboços dos gráficos de F_{a_7} e de F_{a_8} seguem o mesmo raciocínio do gráfico de F_{a_6}.

Figura 9: A *representação-*$F_a M[(b_0 > 0, c_0 = 0)]$



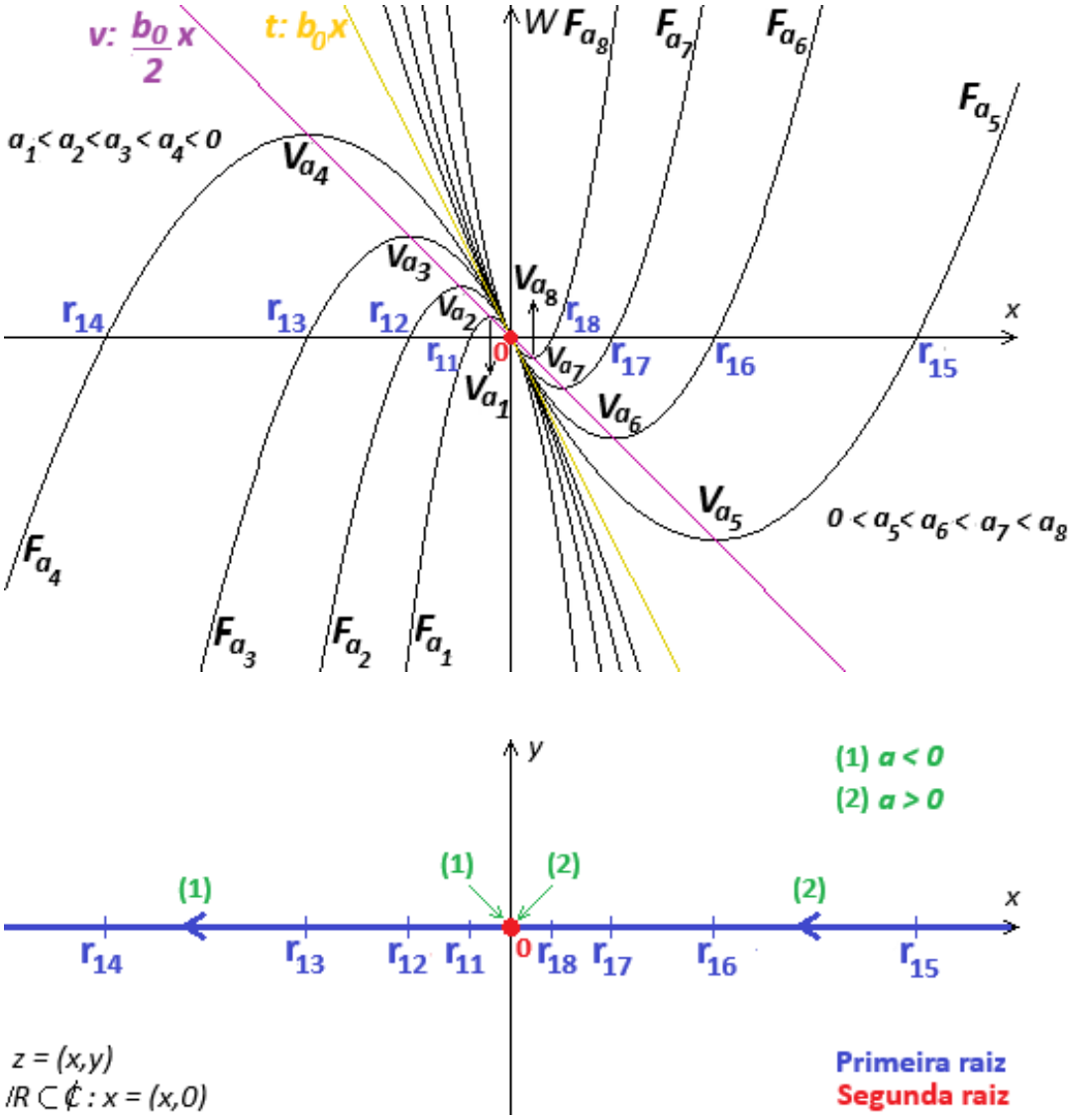
Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0, 0)$) são, resp., $F_{a_1} \to F_{a_2} \to F_{a_3} \to F_{a_4} \to F_{a_5} \to F_{a_6} \to F_{a_7} \to F_{a_8}$, e seus respectivos vértices (sobre a reta v) são $V_{a_1} \to V_{a_2} \to V_{a_3} \to V_{a_4} \to V_{a_5} \to V_{a_6} \to V_{a_7} \to V_{a_8}$. As raízes (reais) de $F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}, F_{a_4}, F_{a_5}, F_{a_6}, F_{a_7}, F_{a_8}$ satisfazem: $0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0$ [1ª raiz] e $r_{21} \to r_{22} \to r_{23} \to r_{24} \to r_{25} \to r_{26} \to r_{27} \to r_{28}$ [2ª raiz]. Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0$, as parábolas $F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}, F_{a_4}$ vão se abrindo e concomitantemente temos para as raízes (reais) de $f_{a_1}, f_{a_2}, f_{a_3}, f_{a_4}$: a 1ª raiz é 0 e a 2ª raiz vai se afastando de 0 sobre o eixo real x ($r_{21} \to r_{22} \to r_{23} \to r_{24}$). Para $0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas $F_{a_5}, F_{a_6}, F_{a_7}, F_{a_8}$ vão se fechando e concomitantemente temos para as raízes (reais) de $f_{a_5}, f_{a_6}, f_{a_7}, f_{a_8}$: a 1ª raiz é 0 e a 2ª raiz vai se aproximando de 0 sobre o eixo real x ($r_{25} \to r_{26} \to r_{27} \to r_{28}$).

8) A *representação-$F_a M[(b_0 < 0, c_0 = 0)]$*

A construção é similar e está representada na Figura 10. Utilizamos as Proposições 3 e 4 (subseção 3.1). [2, p. 9] nos cedeu $M[(b_0 < 0, c_0 = 0)]$. A primeira e a segunda raízes de f_{a_p} são, respectivamente, r_{1p} e $r_{2p} = 0$, $p = 1, ..., 8$.

Figura 10: A *representação-$F_a M[(b_0 < 0, c_0 = 0)]$*



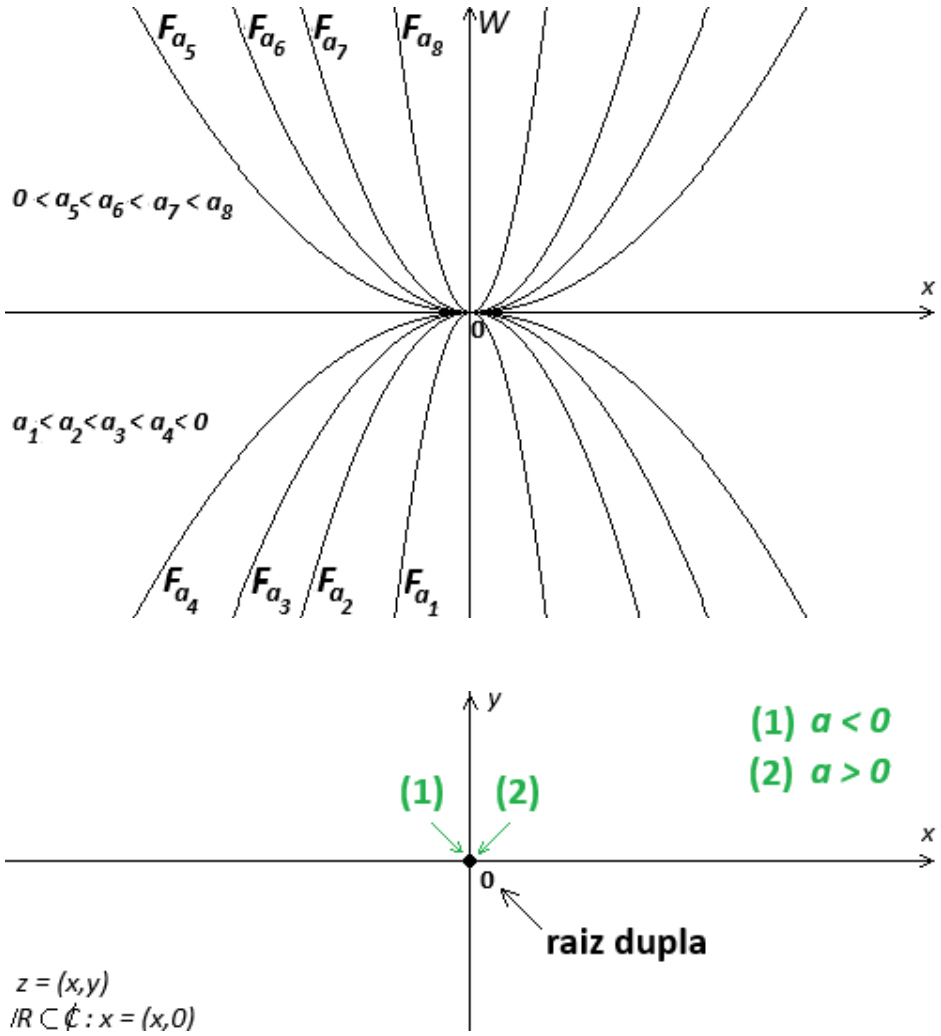
Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas (tangentes à reta t em $(0,0)$) são, resp., $F_{a_1} \to F_{a_2} \to F_{a_3} \to F_{a_4} \to F_{a_5} \to F_{a_6} \to F_{a_7} \to F_{a_8}$, e seus respectivos vértices (sobre a reta v) são $V_{a_1} \to V_{a_2} \to V_{a_3} \to V_{a_4} \to V_{a_5} \to V_{a_6} \to V_{a_7} \to V_{a_8}$. As raízes (reais) de $F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}, F_{a_4}, F_{a_5}, F_{a_6}, F_{a_7}, F_{a_8}$ satisfazem: $r_{11} \to r_{12} \to r_{13} \to r_{14} \to r_{15} \to r_{16} \to r_{17} \to r_{18}$ [1ª raiz] e $0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0$ [2ª raiz]. Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0$, as parábolas $F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}, F_{a_4}$ vão se abrindo e concomitantemente temos para as raízes (reais) de $f_{a_1}, f_{a_2}, f_{a_3}, f_{a_4}$: a 1ª raiz vai se afastando de 0 sobre o eixo real x ($r_{11} \to r_{12} \to r_{13} \to r_{14}$) e a 2ª raiz é 0. Para $0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas $F_{a_5}, F_{a_6}, F_{a_7}, F_{a_8}$ vão se fechando e concomitantemente temos para as raízes (reais) de $f_{a_5}, f_{a_6}, f_{a_7}, f_{a_8}$: a 1ª raiz vai se aproximando de 0 sobre o eixo real x ($r_{15} \to r_{16} \to r_{17} \to r_{18}$) e a 2ª raiz é 0.

9) A *representação-$F_a M[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$*

A construção está na Figura 11. Usamos as Proposições 5 e 6 (subseção 3.1).

Figura 11: A *representação-$F_a M[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$*



Fonte: elaborada pelo autor

Nota: Para $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$, as parábolas (cujos vértices tangenciam o eixo real x em $(0,0)$) são, resp., $F_{a_1} \to F_{a_2} \to F_{a_3} \to F_{a_4} \to F_{a_5} \to F_{a_6} \to F_{a_7} \to F_{a_8}$. F_{a_p} tem raiz dupla nula, $p = 1, \ldots, 8$. [Veja as subseções 3.2 e 3.3.]

3 Apêndice

3.1 Parábolas encaixantes

Proposição 1 *Sejam $b_0 > 0$ e c_0 reais fixos. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_-$, com $\beta < \alpha$, sejam $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\alpha(x) = \alpha x^2 + b_0 x + c_0$ e $F_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\beta(x) = \beta x^2 + b_0 x + c_0$. Então, a parábola F_β é interna à parábola F_α.*

Prova: Sejam $b_0 > 0$ e c_0 reais fixos. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_-$, com $\beta < \alpha$, temos:
$\beta < \alpha < 0 \overset{(b_0>0)}{\Rightarrow} 0 < x_{V_\beta} < x_{V_\alpha} \overset{(b_0>0)}{\Rightarrow} c_0 < W_{V_\beta} < W_{V_\alpha}$.
$\alpha < 0 \Rightarrow ImF_\alpha = \{W \in \mathbb{R} | W \leq W_{V_\alpha}\}$; $\beta < 0 \Rightarrow ImF_\beta = \{W \in \mathbb{R} | W \leq W_{V_\beta}\}$.
Seja $c \leq W_{V_\beta}$. c pode estar em qualquer das 3 regiões: $c_0 < c \leq W_{V_\beta}$, $c = c_0$, $c < c_0$.

- $c_0 < c \leq W_{V_\beta} (< W_{V_\alpha})$

  Afirmação 1: $a < 0$ e $\frac{b_0^2 - 4a(c_0-c)}{4a} \overset{(<)}{\leq} 0$ e $c_0 - c < 0 \Leftrightarrow \frac{b_0^2}{4(c_0-c)} \overset{(<)}{\leq} a < 0$ e $c_0 - c < 0$.

  Prova da Afirmação 1:

  ($\Rightarrow$)

  1. $a < 0 \Rightarrow a < 0$.
  2. $c_0 - c < 0 \Rightarrow c_0 - c < 0$.
  3. $\frac{b_0^2 - 4a(c_0-c)}{4a} \overset{(<)}{\leq} 0 \overset{(a<0)}{\Rightarrow} b_0^2 - 4a(c_0 - c) \overset{(>)}{\geq} 0 \Rightarrow 4a(c_0 - c) \overset{(<)}{\leq} b_0^2 \overset{(c_0-c<0)}{\Rightarrow} a \overset{(>)}{\geq} \frac{b_0^2}{4(c_0-c)}$.

     Logo, $\frac{b_0^2}{4(c_0-c)} \overset{(<)}{\leq} a < 0$ e $c_0 - c < 0$.

  ($\Leftarrow$)

  1. $c_0 - c < 0 \Rightarrow c_0 - c < 0$.
  2. $\frac{b_0^2}{4(c_0-c)} \overset{(<)}{\leq} a < 0 \Rightarrow a < 0$ e $a \overset{(>)}{\geq} \frac{b_0^2}{4(c_0-c)} \Rightarrow a < 0$ e $a - \frac{b_0^2}{4(c_0-c)} \overset{(>)}{\geq} 0 \Rightarrow a < 0$ e $\frac{4a(c_0-c) - b_0^2}{4(c_0-c)} \overset{(>)}{\geq} 0 \overset{(c_0-c<0)}{\Rightarrow} a < 0$ e $4a(c_0 - c) - b_0^2 \overset{(<)}{\leq} 0 \Rightarrow a < 0$ e $b_0^2 - 4a(c_0 - c) \overset{(>)}{\geq} 0$ $\Rightarrow a < 0$ e $\frac{b_0^2 - 4a(c_0-c)}{4a} \overset{(<)}{\leq} 0$.

     Logo, $a < 0$ e $\frac{b_0^2 - 4a(c_0-c)}{4a} \overset{(<)}{\leq} 0$ e $c_0 - c < 0$. □

  Retornando à região $c_0 < c \leq W_{V_\beta}$, temos:

  $\beta < 0$ e $c_0 < c \leq W_{V_\beta} \Leftrightarrow \beta < 0$ e $c_0 < c \leq \frac{4\beta c_0 - b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow \beta < 0$ e $c_0 - c < 0 \leq \frac{4\beta(c_0-c) - b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow$
  $\beta < 0$ e $\frac{b_0^2 - 4\beta(c_0-c)}{4\beta} \leq 0$ e $c_0 - c < 0 \overset{(Af.1)}{\Leftrightarrow} \frac{b_0^2}{4(c_0-c)} \leq \beta < 0$ e $c_0 - c < 0$.
  Logo, a imagem inversa de c pela função F_β é

$$F_\beta^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{-\beta}x - \frac{b_0}{2\sqrt{-\beta}}\right)^2 = -\frac{b_0^2 - 4\beta(c_0-c)}{4\beta}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\beta(c_0-c)}}{2\beta}\right\}.$$

  Da mesma maneira,

  $\alpha < 0$ e $c_0 < c < W_{V_\alpha} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha < 0$ e $\frac{b_0^2 - 4\alpha(c_0-c)}{4\alpha} < 0$ e $c_0 - c < 0 \overset{(Af.1)}{\Leftrightarrow} \frac{b_0^2}{4(c_0-c)} < \alpha < 0$ e $c_0 - c < 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_α é

$$F_\alpha^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{-\alpha}x - \frac{b_0}{2\sqrt{-\alpha}}\right)^2 = -\frac{b_0^2 - 4\alpha(c_0-c)}{4\alpha}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha}\right\}.$$

  Como $\beta < \alpha$, $\frac{b_0^2}{4(c_0-c)} < \alpha < 0$, $\frac{b_0^2}{4(c_0-c)} \leq \beta < 0$, $C_0 \doteq c_0 - c < 0$, $b_0 > 0$, resulta da Figura 4 de [1, p. 42] - com C_0 no lugar de c_0 -, que

$$\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)} \subsetneqq \overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)}.$$

- $c = c_0$

  $F_\beta^{-1}(c_0) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c_0\} = \left\{0, -\frac{b_0}{\beta}\right\}$ e $F_\alpha^{-1}(c_0) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c_0\} = \left\{0, -\frac{b_0}{\alpha}\right\}$.

  $0 > \alpha > \beta \Rightarrow 0 > \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} \overset{(b_0>0)}{\Rightarrow} 0 < -\frac{b_0}{\beta} < -\frac{b_0}{\alpha} \Rightarrow \overline{(0,c_0)\left(-\frac{b_0}{\beta},c_0\right)} \subsetneqq \overline{(0,c_0)\left(-\frac{b_0}{\alpha},c_0\right)}$.

- $c < c_0 (< W_{V_\beta} < W_{V_\alpha})$

  Afirmação 2: Para $a \neq 0$ vale : $\frac{b_0^2-4a(c_0-c)}{4a} < c - c_0 \Leftrightarrow a < 0$.

  Prova da Afirmação 2:

  $\frac{b_0^2-4a(c_0-c)}{4a} + c_0 - c < 0 \Leftrightarrow \frac{b_0^2-4a(c_0-c)+4a(c_0-c)}{4a} < 0 \Leftrightarrow \frac{b_0^2}{4a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$. □

  Retornando à região $c < c_0 < W_{V_\beta}$, temos:

  $c < c_0 < W_{V_\beta} \Leftrightarrow c < c_0 < \frac{4\beta c_0 - b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow 0 < c_0 - c < \frac{4\beta(c_0-c)-b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow \frac{b_0^2-4\beta(c_0-c)}{4\beta} < c - c_0$ e $c - c_0 < 0 \overset{(Af.2)}{\Leftrightarrow} \beta < 0$ e $c_0 - c > 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_β é

$$F_\beta^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{-\beta}x - \frac{b_0}{2\sqrt{-\beta}}\right)^2 = -\frac{b_0^2-4\beta(c_0-c)}{4\beta}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta}\right\}.$$

  Da mesma maneira,

  $c < c_0 < W_{V_\alpha} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}{4\alpha} < c - c_0$ e $c - c_0 < 0 \overset{(Af.2)}{\Leftrightarrow} \alpha < 0$ e $c_0 - c > 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_α é

$$F_\alpha^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{-\alpha}x - \frac{b_0}{2\sqrt{-\alpha}}\right)^2 = -\frac{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}{4\alpha}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha}\right\}.$$

  Como $\beta < \alpha, \alpha < 0, \beta < 0$, $C_0 \doteq c_0 - c > 0$, $b_0 > 0$, resulta da Figura 1 de [1, p. 41] - com C_0 no lugar de c_0 -, que

$$\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)} \subsetneqq \overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)}.$$

  Como $c \leq W_{V_\beta}$ é qualquer, provamos que

$$\cdot\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)} \subsetneqq \overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)},$$

  $c_0 < \forall c \leq W_{V_\beta}$;

$$\cdot\overline{(0,c_0)\ \left(-\frac{b_0}{\beta},c_0\right)} \subsetneqq \overline{(0,c_0)\ \left(-\frac{b_0}{\alpha},c_0\right)},\quad c = c_0;$$

$$\cdot\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)} \subsetneqq \overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)},$$

$\forall c < c_0$.

Portanto, a parábola F_β é interna à parábola F_α.

(Observe: provamos que, para cada $c \leq W_{V_\beta}$, o segmento de reta que une as 2 raízes de $F_\beta - c$ é subconjunto próprio do segmento de reta que une as 2 raízes de $F_\alpha - c$.) $\square$

Proposição 2 *Sejam $b_0 > 0$ e c_0 reais fixos. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, com $\alpha < \beta$, sejam $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\alpha(x) = \alpha x^2 + b_0 x + c_0$ e $F_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\beta(x) = \beta x^2 + b_0 x + c_0$. Então, a parábola F_β é interna à parábola F_α.*

Prova: Sejam $b_0 > 0$ e c_0 reais fixos. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, com $\alpha < \beta$, temos $ImF_\alpha = \{W \in \mathbb{R} | W \geq W_{V_\alpha}\}$, pois $\alpha > 0$, $ImF_\beta = \{W \in \mathbb{R} | W \geq W_{V_\beta}\}$, pois $\beta > 0$, e

$0 < \alpha < \beta \Rightarrow 0 < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \overset{(b_0>0)}{\Rightarrow} 0 < \frac{b_0}{\beta} < \frac{b_0}{\alpha} \Rightarrow 0 > -\frac{b_0}{\beta} > -\frac{b_0}{\alpha} \Rightarrow 0 > -\frac{b_0}{2\beta} > -\frac{b_0}{2\alpha} \Rightarrow x_{V_\alpha} < x_{V_\beta} < 0 \overset{(b_0>0)}{\Rightarrow} \frac{b_0}{2} x_{V_\alpha} < \frac{b_0}{2} x_{V_\beta} < 0 \overset{(c_0 \in \mathbb{R})}{\Rightarrow} \frac{b_0}{2} x_{V_\alpha} + c_0 < \frac{b_0}{2} x_{V_\beta} + c_0 < c_0 \Rightarrow W_{V_\alpha} < W_{V_\beta} < c_0$.

Seja $c \geq W_{V_\beta}$. c pode estar em qualquer das 3 regiões: $W_{V_\beta} \leq c < c_0$, $c = c_0$, $c > c_0$.

- $(W_{V_\alpha} <) W_{V_\beta} \leq c < c_0$

  Afirmação 1: $0 < a$ e $\frac{b_0^2 - 4a(c_0 - c)}{4a} \overset{(>)}{\geq} 0$ e $c_0 - c > 0 \Leftrightarrow 0 < a \overset{(<)}{\leq} \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)}$ e $c_0 - c > 0$.

  Prova da Afirmação 1:

  ($\Rightarrow$)

  1. $a > 0 \Rightarrow a > 0$.
  2. $c_0 - c > 0 \Rightarrow c_0 - c > 0$.
  3. $\frac{b_0^2 - 4a(c_0 - c)}{4a} \overset{(>)}{\geq} 0 \overset{(a>0)}{\Rightarrow} b_0^2 - 4a(c_0 - c) \overset{(>)}{\geq} 0 \Rightarrow 4a(c_0 - c) \overset{(<)}{\leq} b_0^2 \overset{(c_0 - c > 0)}{\Rightarrow} a \overset{(<)}{\leq} \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)}$.

     Logo, $0 < a \overset{(<)}{\leq} \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)}$ e $c_0 - c > 0$.

  ($\Leftarrow$)

  1. $c_0 - c > 0 \Rightarrow c_0 - c > 0$.
  2. $0 < a \overset{(<)}{\leq} \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)} \Rightarrow a > 0$ e $a \overset{(<)}{\leq} \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)} \Rightarrow a > 0$ e $a - \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)} \overset{(<)}{\leq} 0 \Rightarrow a > 0$ e $\frac{4a(c_0 - c) - b_0^2}{4(c_0 - c)} \overset{(<)}{\leq} 0 \overset{(c_0 - c > 0)}{\Rightarrow} a > 0$ e $4a(c_0 - c) - b_0^2 \overset{(<)}{\leq} 0 \Rightarrow a > 0$ e $b_0^2 - 4a(c_0 - c) \overset{(>)}{\geq} 0$ $\Rightarrow a > 0$ e $\frac{b_0^2 - 4a(c_0 - c)}{4a} \overset{(>)}{\geq} 0$.

     Logo, $0 < a$ e $\frac{b_0^2 - 4a(c_0 - c)}{4a} \overset{(>)}{\geq} 0$ e $c_0 - c > 0$. $\square$

  Retornando à região $W_{V_\beta} \leq c < c_0$, temos:

  $0 < \beta$ e $W_{V_\beta} \leq c < c_0 \Leftrightarrow 0 < \beta$ e $\frac{4\beta c_0 - b_0^2}{4\beta} \leq c < c_0 \Leftrightarrow 0 < \beta$ e $\frac{4\beta(c_0 - c) - b_0^2}{4\beta} \leq 0 < c_0 - c \Leftrightarrow$
  $0 < \beta$ e $\frac{b_0^2 - 4\beta(c_0 - c)}{4\beta} \geq 0$ e $c_0 - c > 0 \overset{(Af.1)}{\Leftrightarrow} 0 < \beta \leq \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)}$ e $c_0 - c > 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_β é

$$F_\beta^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{\beta}x + \frac{b_0}{2\sqrt{\beta}}\right)^2 = \frac{b_0^2 - 4\beta(c_0 - c)}{4\beta}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\beta(c_0 - c)}}{2\beta}\right\}.$$

Da mesma maneira,

$0 < \alpha$ e $W_{V_\alpha} < c < c_0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0 < \alpha$ e $\frac{b_0^2 - 4\alpha(c_0 - c)}{4\alpha} > 0$ e $c_0 - c > 0 \overset{(Af.1)}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha < \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)}$ e $c_0 - c > 0$.

Logo, a imagem inversa de c pela função F_α é

$$F_\alpha^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{\alpha}x + \frac{b_0}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \frac{b_0^2 - 4\alpha(c_0 - c)}{4\alpha}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\alpha(c_0 - c)}}{2\alpha}\right\}.$$

Como $\alpha < \beta,\ 0 < \alpha < \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)},\ 0 < \beta \leq \frac{b_0^2}{4(c_0 - c)}, C_0 \doteq c_0 - c > 0,\ b_0 > 0$, resulta da Figura 1 de [1, p. 41] - com C_0 no lugar de c_0 -, que

$$\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta} - \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\beta(c_0 - c)}}{2\beta}, c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta} + \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\beta(c_0 - c)}}{2\beta}, c\right)} \subsetneq \overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha} - \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\alpha(c_0 - c)}}{2\alpha}, c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha} + \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\alpha(c_0 - c)}}{2\alpha}, c\right)}.$$

- $c = c_0$

  $F_\beta^{-1}(c_0) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c_0\} = \left\{-\frac{b_0}{\beta}, 0\right\}$ e $F_\alpha^{-1}(c_0) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c_0\} = \left\{-\frac{b_0}{\alpha}, 0\right\}$.

  $0 < \alpha < \beta \Rightarrow 0 < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \overset{(b_0 > 0)}{\Rightarrow} -\frac{b_0}{\alpha} < -\frac{b_0}{\beta} < 0 \Rightarrow \overline{\left(-\frac{b_0}{\beta}, c_0\right)(0, c_0)} \subsetneq \overline{\left(-\frac{b_0}{\alpha}, c_0\right)(0, c_0)}$.

- $c > c_0\ (> W_{V_\beta} > W_{V_\alpha})$

  Afirmação 2: Para $a \neq 0$ vale : $\frac{b_0^2 - 4a(c_0 - c)}{4a} > c - c_0 \Leftrightarrow a > 0$.

  Prova da Afirmação 2:

  $\frac{b_0^2 - 4a(c_0 - c)}{4a} + c_0 - c > 0 \Leftrightarrow \frac{b_0^2 - 4a(c_0 - c) + 4a(c_0 - c)}{4a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b_0^2}{4a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$. □

  Retornando à região $c > c_0\ > W_{V_\beta}$, temos:

  $c > c_0\ > W_{V_\beta} \Leftrightarrow c > c_0 > \frac{4\beta c_0 - b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow 0 > c_0 - c > \frac{4\beta(c_0 - c) - b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow \frac{b_0^2 - 4\beta(c_0 - c)}{4\beta} > c - c_0$ e $c_0 - c < 0 \overset{(Af.2)}{\Leftrightarrow} \beta > 0$ e $c_0 - c < 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_β é

$$F_\beta^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{\beta}x + \frac{b_0}{2\sqrt{\beta}}\right)^2 = \frac{b_0^2 - 4\beta(c_0 - c)}{4\beta}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\beta(c_0 - c)}}{2\beta}\right\}.$$

  Da mesma maneira,

  $c > c_0\ > W_{V_\alpha} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0 > c_0 - c > \frac{4\alpha(c_0 - c) - b_0^2}{4\alpha} \Leftrightarrow \frac{b_0^2 - 4\alpha(c_0 - c)}{4\alpha} > c - c_0$ e $c_0 - c < 0 \overset{(Af.2)}{\Leftrightarrow} \alpha > 0$ e $c_0 - c < 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_α é

$$F_\alpha^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{\alpha}x + \frac{b_0}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \frac{b_0^2 - 4\alpha(c_0 - c)}{4\alpha}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\alpha(c_0 - c)}}{2\alpha}\right\}.$$

  Como $\alpha < \beta,\ \alpha > 0,\ \beta > 0, C_0 \doteq c_0 - c < 0,\ b_0 > 0$, resulta da Figura 4 de [1, p. 42] - com C_0 no lugar de c_0 -, que

$$\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)}\subsetneqq\overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)}.$$

Como $c \geq W_{V_\beta}$ é qualquer, provamos que

$$\cdot\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)}\subsetneqq\overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)},$$
$W_{V_\beta} \leq \forall c < c_0;$

$$\cdot\overline{\left(-\frac{b_0}{\beta},c_0\right)\ (0,c_0)}\subsetneqq\overline{\left(-\frac{b_0}{\alpha},c_0\right)\ (0,c_0)},\quad c=c_0;$$

$$\cdot\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)}\subsetneqq\overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)},$$
$\forall c > c_0.$

Portanto, a parábola F_β é interna à parábola F_α.

(Observe: provamos que, para cada $c \geq W_{V_\beta}$, o segmento de reta que une as 2 raízes de $F_\beta - c$ é subconjunto próprio do segmento de reta que une as 2 raízes de $F_\alpha - c$.) □

Proposição 3 *Sejam $b_0 < 0$ e c_0 reais fixos. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_-$, com $\beta < \alpha$, sejam $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\alpha(x) = \alpha x^2 + b_0 x + c_0$ e $F_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\beta(x) = \beta x^2 + b_0 x + c_0$. Então, a parábola F_β é interna à parábola F_α.*

Prova: Sejam $b_0 < 0$ e c_0 reais fixos. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_-$, com $\beta < \alpha$, temos:

$\beta < \alpha < 0 \overset{(b_0<0)}{\Rightarrow} x_{V_\alpha} < x_{V_\beta} < 0 \overset{(b_0<0)}{\Rightarrow} c_0 < W_{V_\beta} < W_{V_\alpha}$.

$\alpha < 0 \Rightarrow ImF_\alpha = \{W \in \mathbb{R} | W \leq W_{V_\alpha}\}$; $\beta < 0 \Rightarrow ImF_\beta = \{W \in \mathbb{R} | W \leq W_{V_\beta}\}$.

Seja $c \leq W_{V_\beta}$. c pode estar em qualquer das 3 regiões: $c_0 < c \leq W_{V_\beta}$, $c = c_0$, $c < c_0$.

- $c_0 < c \leq W_{V_\beta} (< W_{V_\alpha})$

  Afirmação 1: $a < 0$ e $\frac{b_0^2-4a(c_0-c)}{4a} \overset{(<)}{\leq} 0$ e $c_0 - c < 0 \Leftrightarrow \frac{b_0^2}{4(c_0-c)} \overset{(<)}{\leq} a < 0$ e $c_0 - c < 0$.

  Prova da Afirmação 1: Veja a prova da *Afirmação 1* da Proposição 1. □

  Retornando à região $c_0 < c \leq W_{V_\beta}$, temos:

  $\beta < 0$ e $c_0 < c \leq W_{V_\beta} \Leftrightarrow \beta < 0$ e $c_0 < c \leq \frac{4\beta c_0 - b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow \beta < 0$ e $c_0 - c < 0 \leq \frac{4\beta(c_0-c)-b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow$
  $\beta < 0$ e $\frac{b_0^2-4\beta(c_0-c)}{4\beta} \leq 0$ e $c_0 - c < 0 \overset{(Af.1)}{\Leftrightarrow} \frac{b_0^2}{4(c_0-c)} \leq \beta < 0$ e $c_0 - c < 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_β é

$$F_\beta^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{-\beta}x - \frac{b_0}{2\sqrt{-\beta}}\right)^2 = -\frac{b_0^2-4\beta(c_0-c)}{4\beta}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta}\right\}.$$

  Da mesma maneira,

  $\alpha < 0$ e $c_0 < c < W_{V_\alpha} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha < 0$ e $\frac{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}{4\alpha} < 0$ e $c_0 - c < 0 \overset{(Af.1)}{\Leftrightarrow} \frac{b_0^2}{4(c_0-c)} < \alpha < 0$ e $c_0 - c < 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_α é

$$F_\alpha^{-1}(c)=\{x\in\mathbb{R}|F_\alpha(x)=c\}=\left\{x\in\mathbb{R}|\left(\sqrt{-\alpha}x-\frac{b_0}{2\sqrt{-\alpha}}\right)^2=-\frac{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}{4\alpha}\right\}=\left\{-\frac{b_0}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha}\right\}.$$

Como $\beta<\alpha$, $\frac{b_0^2}{4(c_0-c)}<\alpha<0$, $\frac{b_0^2}{4(c_0-c)}\leq\beta<0$, $C_0\doteq c_0-c<0$, $b_0<0$, resulta da Figura 5 de [1, p. 43] - com C_0 no lugar de c_0 -, que

$$\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)}\subsetneqq\overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)}.$$

- $c=c_0$

  $F_\beta^{-1}(c_0)=\{x\in\mathbb{R}|F_\beta(x)=c_0\}=\left\{-\frac{b_0}{\beta},0\right\}$ e $F_\alpha^{-1}(c_0)=\{x\in\mathbb{R}|F_\alpha(x)=c_0\}=\left\{-\frac{b_0}{\alpha},0\right\}$.

  $\beta<\alpha<0\Rightarrow\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}<0\overset{(b_0<0)}{\Rightarrow}-\frac{b_0}{\alpha}<-\frac{b_0}{\beta}<0\Rightarrow\overline{\left(-\frac{b_0}{\beta},c_0\right)(0,c_0)}\subsetneqq\overline{\left(-\frac{b_0}{\alpha},c_0\right)(0,c_0)}$.

- $c<c_0(<W_{V_\beta}<W_{V_\alpha})$

  Afirmação 2: Para $a\neq0$ vale : $\frac{b_0^2-4a(c_0-c)}{4a}<c-c_0\Leftrightarrow a<0$.

  Prova da Afirmação 2: Veja a prova da *Afirmação 2* da Proposição 1. □

  Retornando à região $c<c_0<W_{V_\beta}$, temos:

  $c<c_0<W_{V_\beta}\Leftrightarrow c<c_0<\frac{4\beta c_0-b_0^2}{4\beta}\Leftrightarrow0<c_0-c<\frac{4\beta(c_0-c)-b_0^2}{4\beta}\Leftrightarrow\frac{b_0^2-4\beta(c_0-c)}{4\beta}<c-c_0$ e $c-c_0<0\overset{(Af.2)}{\Leftrightarrow}\beta<0$ e $c_0-c>0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_β é

$$F_\beta^{-1}(c)=\{x\in\mathbb{R}|F_\beta(x)=c\}=\left\{x\in\mathbb{R}|\left(\sqrt{-\beta}x-\frac{b_0}{2\sqrt{-\beta}}\right)^2=-\frac{b_0^2-4\beta(c_0-c)}{4\beta}\right\}=\left\{-\frac{b_0}{2\beta}\pm\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta}\right\}.$$

  Da mesma maneira,

  $c<c_0<W_{V_\alpha}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\frac{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}{4\alpha}<c-c_0$ e $c-c_0<0\overset{(Af.2)}{\Leftrightarrow}\alpha<0$ e $c_0-c>0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_α é

$$F_\alpha^{-1}(c)=\{x\in\mathbb{R}|F_\alpha(x)=c\}=\left\{x\in\mathbb{R}|\left(\sqrt{-\alpha}x-\frac{b_0}{2\sqrt{-\alpha}}\right)^2=-\frac{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}{4\alpha}\right\}=\left\{-\frac{b_0}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha}\right\}.$$

  Como $\beta<\alpha,\alpha<0,\beta<0$, $C_0\doteq c_0-c>0$, $b_0<0$, resulta da Figura 3 de [1, p. 42] - com C_0 no lugar de c_0 -, que

$$\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta},c\right)}\subsetneqq\overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha}+\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha}-\frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha},c\right)}.$$

Como $c\leq W_{V_\beta}$ é qualquer, fica provada a tese. □

Proposição 4 *Sejam $b_0<0$ e c_0 reais fixos. Dados $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$, com $\beta>\alpha$, sejam $F_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $F_\alpha(x)=\alpha x^2+b_0x+c_0$ e $F_\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $F_\beta(x)=\beta x^2+b_0x+c_0$. Então, a parábola F_β é interna à parábola F_α.*

Prova: Sejam $b_0 < 0$ e c_0 reais fixos. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, com $\beta > \alpha$, temos $ImF_\alpha = \{W \in \mathbb{R} | W \geq W_{V_\alpha}\}$, pois $\alpha > 0$, $ImF_\beta = \{W \in \mathbb{R} | W \geq W_{V_\beta}\}$, pois $\beta > 0$, e

$0 < \alpha < \beta \Rightarrow 0 < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \overset{(b_0<0)}{\Rightarrow} 0 > \frac{b_0}{\beta} > \frac{b_0}{\alpha} \Rightarrow 0 < -\frac{b_0}{\beta} < -\frac{b_0}{\alpha} \Rightarrow 0 < -\frac{b_0}{2\beta} < -\frac{b_0}{2\alpha} \Rightarrow 0 < x_{V_\beta} < x_{V_\alpha} \overset{(b_0<0)}{\Rightarrow} 0 > \frac{b_0}{2}x_{V_\beta} > \frac{b_0}{2}x_{V_\alpha} \overset{(c_0 \in \mathbb{R})}{\Rightarrow} c_0 > \frac{b_0}{2}x_{V_\beta} + c_0 > \frac{b_0}{2}x_{V_\alpha} + c_0 \Rightarrow c_0 > W_{V_\beta} > W_{V_\alpha}$.

Seja $c \geq W_{V_\beta}$. c pode estar em qualquer das 3 regiões: $W_{V_\beta} \leq c < c_0$, $c = c_0$, $c > c_0$.

- $(W_{V_\alpha} <) W_{V_\beta} \leq c < c_0$

  Afirmação 1: $0 < a$ e $\frac{b_0^2 - 4a(c_0-c)}{4a} \overset{(>)}{\geq} 0$ e $c_0 - c > 0 \Leftrightarrow 0 < a \overset{(<)}{\leq} \frac{b_0^2}{4(c_0-c)}$ e $c_0 - c > 0$.

  Prova da Afirmação 1: Veja a prova da *Afirmação 1* da Proposição 2. □

  Retornando à região $W_{V_\beta} \leq c < c_0$, temos:

  $0 < \beta$ e $W_{V_\beta} \leq c < c_0 \Leftrightarrow 0 < \beta$ e $\frac{4\beta c_0 - b_0^2}{4\beta} \leq c < c_0 \Leftrightarrow 0 < \beta$ e $\frac{4\beta(c_0-c) - b_0^2}{4\beta} \leq 0 < c_0 - c \Leftrightarrow 0 < \beta$ e $\frac{b_0^2 - 4\beta(c_0-c)}{4\beta} \geq 0$ e $c_0 - c > 0 \overset{(Af.1)}{\Leftrightarrow} 0 < \beta \leq \frac{b_0^2}{4(c_0-c)}$ e $c_0 - c > 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_β é

  $$F_\beta^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{\beta}x + \frac{b_0}{2\sqrt{\beta}}\right)^2 = \frac{b_0^2 - 4\beta(c_0-c)}{4\beta}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\beta(c_0-c)}}{2\beta}\right\}.$$

  Da mesma maneira,

  $0 < \alpha$ e $W_{V_\alpha} < c < c_0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0 < \alpha$ e $\frac{b_0^2 - 4\alpha(c_0-c)}{4\alpha} > 0$ e $c_0 - c > 0 \overset{(Af.1)}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha < \frac{b_0^2}{4(c_0-c)}$ e $c_0 - c > 0$.

  Logo, a imagem inversa de c pela função F_α é

  $$F_\alpha^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c\} = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{\alpha}x + \frac{b_0}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \frac{b_0^2 - 4\alpha(c_0-c)}{4\alpha}\right\} = \left\{-\frac{b_0}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha}\right\}.$$

  Como $\alpha < \beta$, $0 < \alpha < \frac{b_0^2}{4(c_0-c)}$, $0 < \beta \leq \frac{b_0^2}{4(c_0-c)}$, $C_0 \doteq c_0 - c > 0$, $b_0 < 0$, resulta da Figura 3 de [1, p. 42] - com C_0 no lugar de c_0 -, que

  $$\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta} - \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\beta(c_0-c)}}{2\beta}, c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta} + \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\beta(c_0-c)}}{2\beta}, c\right)} \subsetneqq \overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha} - \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha}, c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha} + \frac{\sqrt{b_0^2 - 4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha}, c\right)}.$$

- $c = c_0$

  $F_\beta^{-1}(c_0) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c_0\} = \left\{0, -\frac{b_0}{\beta}\right\}$ e $F_\alpha^{-1}(c_0) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c_0\} = \left\{0, -\frac{b_0}{\alpha}\right\}$.

  $0 < \alpha < \beta \Rightarrow 0 < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha} \overset{(b_0<0)}{\Rightarrow} 0 < -\frac{b_0}{\beta} < -\frac{b_0}{\alpha} \Rightarrow \overline{(0, c_0)\ (-\frac{b_0}{\beta}, c_0)} \subsetneqq \overline{(0, c_0)\ (-\frac{b_0}{\alpha}, c_0)}$.

- $c > c_0$ $(> W_{V_\beta} > W_{V_\alpha})$

  Afirmação 2: Para $a \neq 0$ vale : $\frac{b_0^2 - 4a(c_0-c)}{4a} > c - c_0 \Leftrightarrow a > 0$.

  Prova da Afirmação 2: Veja a prova da *Afirmação 2* da Proposição 2. □

  Retornando à região $c > c_0 > W_{V_\beta}$, temos:

$c > c_0 > W_{V_\beta} \Leftrightarrow c > c_0 > \frac{4\beta c_0 - b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow 0 > c_0 - c > \frac{4\beta(c_0-c)-b_0^2}{4\beta} \Leftrightarrow \frac{b_0^2-4\beta(c_0-c)}{4\beta} > c - c_0$ e $c_0 - c < 0 \overset{(Af.2)}{\Leftrightarrow} \beta > 0$ e $c_0 - c < 0$.

Logo, a imagem inversa de c pela função F_β é

$$F_\beta^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c\} = \left\{ x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{\beta}x + \frac{b_0}{2\sqrt{\beta}}\right)^2 = \frac{b_0^2-4\beta(c_0-c)}{4\beta} \right\} = \left\{ -\frac{b_0}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta} \right\}.$$

Da mesma maneira,

$c > c_0 > W_{V_\alpha} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0 > c_0 - c > \frac{4\alpha(c_0-c)-b_0^2}{4\alpha} \Leftrightarrow \frac{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}{4\alpha} > c - c_0$ e $c_0 - c < 0 \overset{(Af.2)}{\Leftrightarrow}$ $\alpha > 0$ e $c_0 - c < 0$.

Logo, a imagem inversa de c pela função F_α é

$$F_\alpha^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c\} = \left\{ x \in \mathbb{R} | \left(\sqrt{\alpha}x + \frac{b_0}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \frac{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}{4\alpha} \right\} = \left\{ -\frac{b_0}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha} \right\}.$$

Como $\alpha < \beta,\ \alpha > 0,\ \beta > 0, C_0 \doteq c_0 - c < 0,\ b_0 < 0$, resulta da Figura 5 de [1, p. 43] - com C_0 no lugar de c_0 -, que

$$\overline{\left(-\frac{b_0}{2\beta} - \frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta}, c\right)\left(-\frac{b_0}{2\beta} + \frac{\sqrt{b_0^2-4\beta(c_0-c)}}{2\beta}, c\right)} \subsetneqq \overline{\left(-\frac{b_0}{2\alpha} - \frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha}, c\right)\left(-\frac{b_0}{2\alpha} + \frac{\sqrt{b_0^2-4\alpha(c_0-c)}}{2\alpha}, c\right)}.$$

Como $c \geq W_{V_\beta}$ é qualquer, segue que a parábola F_β é interna à parábola F_α.

(Observe: provamos que, para cada $c \geq W_{V_\beta}$, o segmento de reta que une as 2 raízes de $F_\beta - c$ é subconjunto próprio do segmento de reta que une as 2 raízes de $F_\alpha - c$.) □

Proposição 5 *Seja c_0 um real fixo. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_-^*$, com $\beta < \alpha$, sejam $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\alpha(x) = \alpha x^2 + c_0$ e $F_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\beta(x) = \beta x^2 + c_0$. Então, a parábola F_β é interna à parábola F_α.*

Prova: Sejam $c_0 \in \mathbb{R}$ fixo e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_-^*$, com $\beta < \alpha$. Como é fácil ver, $V_\alpha = V_\beta = (0, c_0)$. Temos $ImF_\alpha = \{W \in \mathbb{R} | W \leq c_0\}$, pois $\alpha < 0$, e $ImF_\beta = \{W \in \mathbb{R} | W \leq c_0\}$, pois $\beta < 0$.

Seja $c = c_0$. Então $F_\alpha^{-1}(c_0) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c_0\} = F_\beta^{-1}(c_0) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c_0\} = \{0\}$, ou seja, é o que já sabemos: $V_\alpha = V_\beta = (0, c_0)$.

Seja $c < c_0$. Temos

$F_\alpha^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\alpha(x) = c\} = \left\{ \pm \sqrt{\frac{c-c_0}{\alpha}} \right\}$, $F_\beta^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} | F_\beta(x) = c\} = \left\{ \pm \sqrt{\frac{c-c_0}{\beta}} \right\}$ e

$\beta < \alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta} < 0 \overset{(c-c_0<0)}{\Rightarrow} 0 < \frac{c-c_0}{\beta} < \frac{c-c_0}{\alpha} \Rightarrow 0 < \sqrt{\frac{c-c_0}{\beta}} < \sqrt{\frac{c-c_0}{\alpha}} \Rightarrow -\sqrt{\frac{c-c_0}{\alpha}} < -\sqrt{\frac{c-c_0}{\beta}} < 0$. Como $c < c_0$ é qualquer, $\overline{\left(-\sqrt{\frac{c-c_0}{\beta}}, c\right)\left(\sqrt{\frac{c-c_0}{\beta}}, c\right)} \subsetneqq \overline{\left(-\sqrt{\frac{c-c_0}{\alpha}}, c\right)\left(\sqrt{\frac{c-c_0}{\alpha}}, c\right)}, \forall c < c_0$. Logo, a parábola F_β é interna à parábola F_α. □

Proposição 6 *Seja c_0 um real fixo. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, com $\beta > \alpha$, sejam $F_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\alpha(x) = \alpha x^2 + c_0$ e $F_\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_\beta(x) = \beta x^2 + c_0$. Então F_β é interna a F_α .*

Prova: É similar à da Proposição 5. □

3.2 Curvatura

Uma curva parametrizada diferenciável $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é chamada de curva regular se o seu vetor velocidade nunca se anula. Formalmente, a condição é:

$$\lambda'(x) \neq (0,0) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se λ é dada por $\lambda(x) = (g(x), F(x))$, sua curvatura em $x \in \mathbb{R}$ é dada pela expressão:

$$k(x) = \frac{g'(x)F''(x) - g''(x)F'(x)}{\left((g'(x))^2 + (F'(x))^2\right)^{3/2}}.$$

Uma análise da Figura 6

Fixe $c_0 > 0$. Para cada $a \in \mathbb{R}^*$, sejam $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_a(x) = ax^2 + c_0$ e $f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f_a(z) = az^2 + c_0$.

Parametrizando F_a obtemos $\lambda_a(x) = (g(x), F_a(x)) = (x, ax^2 + c_0)$, que é regular em $\mathbb{R}$, pois $\lambda_a'(x) = (1, 2ax) \neq (0,0), \forall x \in \mathbb{R}$.

A curvatura de λ_a em $x \in \mathbb{R}$ é

$$k_a(x) = \frac{g'(x)F_a''(x) - g''(x)F_a'(x)}{\left((g'(x))^2 + (F_a'(x))^2\right)^{3/2}} = \frac{1 \cdot (2a) - 0 \cdot (2ax)}{\left(1^2 + (2ax)^2\right)^{3/2}} = \frac{2a}{\left(1 + 4a^2x^2\right)^{3/2}}.$$

Temos $k_a(\underbrace{0}_{x_{V_a}}) = 2a$.

As raízes de f_a, onde $i = \sqrt{-1}$, são:

$$z_1(a) = -\sqrt{\frac{c_0}{-a}} \ , \ z_2(a) = \sqrt{\frac{c_0}{-a}} \ , \ \text{para} \ \ a < 0, \tag{18}$$

$$z_1(a) = \sqrt{\frac{c_0}{a}}\, i \ , \ z_2(a) = -\sqrt{\frac{c_0}{a}}\, i \ , \ \text{para} \ \ a > 0. \tag{19}$$

Logo, os seguintes resultados são válidos (onde $d(z_1(a), z_2(a))$ é a distância entre $z_1(a)$ e $z_2(a)$ considerando a métrica euclidiana):

- $k_\beta(0) < k_\alpha(0) \Leftrightarrow d(z_1(\beta), z_2(\beta)) < d(z_1(\alpha), z_2(\alpha)), \quad \text{para} \quad \beta < \alpha < 0.$

  Prova: $k_\beta(0) < k_\alpha(0) \Leftrightarrow 2\beta < 2\alpha \Leftrightarrow -\beta > -\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{-\alpha} > \frac{1}{-\beta} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{c_0}{-\alpha}} > 2\sqrt{\frac{c_0}{-\beta}} \Leftrightarrow d(z_1(\beta), z_2(\beta)) < d(z_1(\alpha), z_2(\alpha))$ □

- $k_\beta(0) > k_\alpha(0) \Leftrightarrow d(z_1(\beta), z_2(\beta)) < d(z_1(\alpha), z_2(\alpha)), \quad \text{para} \quad \beta > \alpha > 0.$

  Prova: $k_\beta(0) > k_\alpha(0) \Leftrightarrow 2\beta > 2\alpha \Leftrightarrow \beta > \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{c_0}{\alpha}} > 2\sqrt{\frac{c_0}{\beta}} \Leftrightarrow d(z_1(\beta), z_2(\beta)) < d(z_1(\alpha), z_2(\alpha))$ □

Uma análise da Figura 11

Para cada $a \in \mathbb{R}^*$, seja $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F_a(x) = ax^2$.

Parametrizando F_a obtemos $\lambda_a(x) = (g(x), F_a(x)) = (x, ax^2)$, que é regular em $\mathbb{R}$, pois $\lambda_a'(x) = (1, 2ax) \neq (0,0), \forall x \in \mathbb{R}$.

A curvatura de λ_a em $x \in \mathbb{R}$ é dada por

$$k_a(x) = \frac{g'(x)F_a''(x) - g''(x)F_a'(x)}{\left((g'(x))^2 + (F_a'(x))^2\right)^{3/2}} = \frac{2a}{\left(1+4a^2x^2\right)^{3/2}}.$$

Estamos interessados na curvatura de cada λ_a da família $(\lambda_a)_{a\in\mathbb{R}^*}$ num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ *fixo*. Para tal reescrevemos a curvatura de λ_a em $x_0 \in \mathbb{R}$ *fixo* como $k(a, x_0) = \frac{2a}{\left(1+4a^2x_0^2\right)^{3/2}}$.

Na Figura 12 analisamos o significado da curvatura de λ_1, λ_3 e λ_{10} para pontos próximos de $x_0 = 0$ e $x_0 = 0.5$, isto é, considerando que a curvatura é uma medida de quanto a curva difere da reta tangente para pontos próximos do ponto estudado [3, p. 59] e que a curvatura da reta é nula [3, p. 38]. Na Figura 12 encontram-se:

(a) As parábolas $F_1 \to F_3 \to F_{10}$. A reta tangente a elas no vértice $(0, 0)$ é a reta $W = 0$. As retas tangentes a elas nos pontos $(0.5, 0.25), (0.5, 0.75), (0.5, 2.5)$ são, resp., t_1, t_3, t_{10}, que se interceptam no ponto $(0.25, 0)$.

(b) O gráfico de $k(a, 0) = 2a, a \neq 0$, com os valores $k(1, 0) = 2 < k(3, 0) = 6 < k(10, 0) = 20$.

(c) O gráfico de $k(a, 0.5) = 2a/(1+a^2)^{3/2}, a \neq 0$, com os valores $k(1, 0.5) \approx 0.71 > k(3, 0.5) \approx 0.19 > k(10, 0.5) \approx 0.02$. [$k(a, 0.5)$ é estritamente decrescente em $[\sqrt{2}/2, +\infty[$, $k(\sqrt{2}/2, 0.5) = 4\sqrt{3}/9 \approx 0.77$ e $\lim_{a\to+\infty} k(a, 0.5) = 0$.]

Provemos que $k(a, 0.5) = \dfrac{2a}{(1+a^2)^{3/2}}$, $a \neq 0$, é estritamente decrescente em $[\sqrt{2}/2, +\infty[$.

A derivada de $k(a, 0.5)$ é $k'(a, 0.5) = \dfrac{2-4a^2}{(1+a^2)^{5/2}}$. Como $(1+a^2)^{5/2} > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^*$, o sinal de $k'(a, 0.5)$ é o mesmo que o do numerador. Temos $2-4a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}/2$. Considerando apenas os valores de a maiores que 0, temos que $k'(a, 0.5) < 0$ para $a > \sqrt{2}/2$, isto é, $k(a, 0.5)$ é estritamente decrescente para $a > \sqrt{2}/2$.

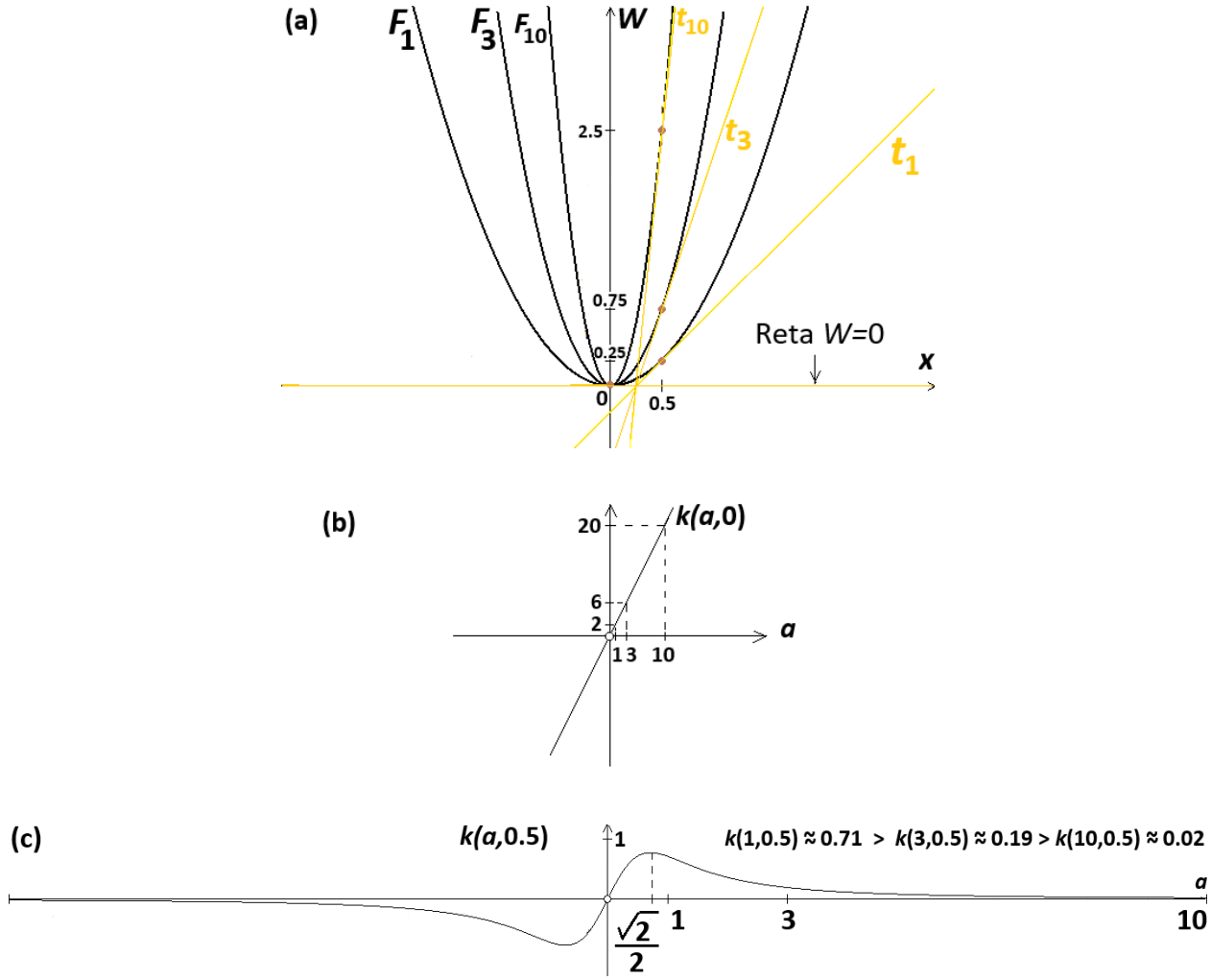
Provemos que $\lim_{a\to+\infty} k(a, 0.5) = 0$.

$$\lim_{a\to+\infty} k(a, 0.5) = \lim_{a\to+\infty} \frac{2a}{(1+a^2)^{3/2}} = \lim_{a\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{(1+a^2)^3}{a^2}}} = \lim_{a\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + 3 + 3a^2 + a^4}} = \frac{2}{\sqrt{+\infty}} = 0.$$

Significado da Curvatura em $x_0 = 0$: a curvatura no vértice é dada por $k(a, 0) = 2a$. À medida que a cresce $(1 \to 3 \to 10)$, a curvatura no ponto $(0, 0)$ aumenta significativamente ($k(1, 0) = 2 < k(3, 0) = 6 < k(10, 0) = 20$ (veja (b)). Geometricamente, a parábola se fecha e diverge mais rapidamente da sua reta tangente $W = 0$ perto de $(0, 0)$ (veja (a)).

Significado da Curvatura em $x_0 = 0.5$: a curvatura em $x_0 = 0.5$ é dada por $k(a, 0.5) = \frac{2a}{(1+a^2)^{3/2}}$. Ao contrário do que ocorre em $x_0 = 0$, à medida que a cresce $(1 \to 3 \to 10)$, a curvatura em $x_0 = 0.5$ diminui $(k(1; 0.5) \approx 0,71 > k(3; 0.5) \approx 0,19 > k(10.0, 5) \approx 0,02)$ e tende a 0 quando $a \to +\infty$ (veja (c)). Isso reflete o fato de que, para valores elevados de a, a parábola torna-se localmente quase "reta"(de declive muito acentuado a) ao redor de $x_0 = 0.5$, colando-se à sua respectiva reta tangente t_a (veja (a)).

Figura 12: A curvatura de λ_a em $x_0 = 0$ e $x_0 = 0.5$



Fonte: elaborada pelo autor

Nota: À medida que a cresce ($1 \to 3 \to 10$): a parábola se fecha e diverge mais rapidamente da sua reta tangente $W = 0$ perto de $(0, 0)$; a parábola torna-se localmente quase "reta"(de declive muito acentuado) ao redor de $x_0 = 0.5$, colando-se à sua respectiva reta tangente t_a.

3.3 Convergência simples e convergência uniforme

Seja X um conjunto de números reais. Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ uma função f_n, definida em X e tomando valores reais [4, p. 362].

> Dizer que a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ significa, formalmente, o seguinte: dado qualquer $\epsilon > 0$, pode-se obter, para cada $x \in X$, um natural $n_0 = n_0(\epsilon, x)$, o qual depende de ϵ e de x, tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ [4, p. 365].

Proposição 7 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $F_n^+ : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ dada por $F_n^+(x) = nx^2$. A sequência de funções inversas $(F_n^+)^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, dada por $(F_n^+)^{-1}(W) = \sqrt{\frac{W}{n}}$, converge simplesmente para $O : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, dada por $O(W) = 0$.*

Prova: Separamos a prova em duas situações:

1) Sejam $\epsilon > 0$ e $W = 0$. Escolho $n_0 = n_0(\epsilon, W = 0) = 1 > \frac{0}{\epsilon^2} = \frac{W}{\epsilon^2}$.

$n > n_0 = 1 \Rightarrow \left|(F_n^+)^{-1}(0) - O(0)\right| = \sqrt{\frac{0}{n}} = 0 < \epsilon$.

2) Sejam $\epsilon > 0$ e $W \in]0, +\infty[$. Escolho $n_0 = n_0(\epsilon, W) \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n_0(\epsilon, W) > \frac{W}{\epsilon^2}$.

$n > n_0 > \frac{W}{\epsilon^2} \Rightarrow \left|(F_n^+)^{-1}(W) - O(W)\right| = \left|\sqrt{\frac{W}{n}} - 0\right| = \sqrt{\frac{W}{n}} < \sqrt{\frac{W}{n_0}} < \sqrt{\frac{W\epsilon^2}{W}} = \epsilon$. □

Proposição 8 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $F_n^- :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[$ dada por $F_n^-(x) = nx^2$. A sequência de funções inversas $(F_n^-)^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$, dada por $(F_n^-)^{-1}(W) = -\sqrt{\frac{W}{n}}$, converge simplesmente para $O_\circ : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$, dada por $O_\circ(W) = 0$.*

Prova: É similar à da Proposição 7. □

Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall\, x \in X$ [4, p. 365].

Proposição 9 *Para $M > 0$ fixo, a sequência de funções $(F_n^+)^{-1}\big|_{[0,M]} : [0, M] \to [0, +\infty[$ converge uniformemente para $O\big|_{[0,M]} : [0, M] \to [0, +\infty[$.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$. Escolho $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n_0(\epsilon) > \frac{(M+1)}{\epsilon^2}$.

$n > n_0 > (M+1)/\epsilon^2 \Rightarrow \left|(F_n^+)^{-1}\big|_{[0,M]}(W) - O\big|_{[0,M]}(W)\right| = \sqrt{\frac{W}{n}} \leq \sqrt{\frac{W}{n_0}} \leq \sqrt{\frac{W}{M+1}}\,\epsilon \leq \sqrt{\frac{M}{M+1}}\,\epsilon < \epsilon$, $\forall\, W \in [0, M]$. □

Proposição 10 *Para $M > 0$ fixo, a sequência de funções $(F_n^-)^{-1}\big|_{[0,M]} : [0, M] \to]-\infty, 0]$ converge uniformemente para $O_\circ\big|_{[0,M]} : [0, M] \to]-\infty, 0]$.*

Prova: É similar à da Proposição 9. □

"Para provar que f_n não converge uniformemente para f em X devemos exibir um $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ se pode achar $n > n_0$ e $x \in X$ com $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$"[4, p. 366].

Proposição 11 *A sequência de funções inversas $(F_n^+)^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ não converge uniformemente para $O : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$.*

Prova: Fixe $\epsilon = \frac{1}{2}$. Dado um $n_0 \in \mathbb{N}$ qualquer, escolho, por exemplo, $n = n_0 + 1$ (garantindo que $n > n_0$). Em seguida, escolho W tal que $W \geq \frac{n}{4}$ (por exemplo, fazendo $W = n$). Como o domínio é $[0, +\infty[$, W é válido. Temos $\left|(F_n^+)^{-1}(W) - O(W)\right| = \left|\sqrt{\frac{W}{n}} - 0\right| = \sqrt{\frac{W}{n}} \geq \sqrt{\frac{n/4}{n}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 1/2$. □

Proposição 12 *A sequência de funções inversas $(F_n^-)^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$ não converge uniformemente para $O_\circ : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$.*

Prova: É similar à da Proposição 11. □

4 Conclusões

O presente trabalho alcançou seu objetivo central de apresentar e construir a *representação-F_aM* aplicada à função quadrática. Esta ferramenta preenche uma lacuna visual e pedagógica no ensino de matemática ao unificar, em uma mesma figura, a *representação-F_a* (que mostra a evolução geométrica da parábola no plano cartesiano) e a *representação-M* (que ilustra a trajetória das duas raízes da função complexa associada no plano complexo). Dessa forma, tornou-se possível a observação simultânea e integrada das alterações no gráfico real e do movimento dinâmico das raízes da função complexa associada conforme o coeficiente a é variado.

5 Agradecimentos

Aos pareceristas, que contribuíram para melhorar a qualidade deste artigo.

Referências

[1] YAMAOKA, L. C. Os caminhos das raízes da função quadrática. **C. Q. D. –** Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 23, n. 2, p. 36–61, dez. 2023. Disponível em: https://revistas.bauru.unesp.br/index.php/revistacqd/article/view/402. Acesso em: 02 jan. 2024.

[2] YAMAOKA, L. C. Os caminhos das raízes da função quadrática: molde, modelo e estilo. **C. Q. D. –** Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 26, p. e26014, 2025. Disponível em: https://revistas.bauru.unesp.br/index.php/revistacqd/article/view/515. Acesso em: 19 jan. 2026.

[3] ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. S. **Geometria diferencial das curvas no** $\mathbb{R}^2$. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

[4] LIMA, E. L. **Curso de análise**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. v. 1.