

Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 26, 2025
Artigo de Pesquisa

Luís Cláudio Yamaoka

Universidade Federal de São Paulo
(Unifesp), Escola Paulista de
Política, Economia e Negócios,
Osasco, luis.yamaoka@unifesp.br

Os caminhos das raízes da função quadrática - molde, modelo e estilo

The paths of the roots of the quadratic function -
mold, model and style

Resumo

Fixados dois coeficientes reais e variando-se o coeficiente real remanescente da função quadrática obtém-se o *modelo* dos caminhos descritos pelas duas raízes da função no plano complexo (Yamaoka, 2023). Um *estilo* é um conjunto de *modelos* que têm relações entre si e compartilham o mesmo *molde* - estrutura- (exceto o *estilo* 4 oriundo de $f_a(z) = az^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, constituído de único *modelo*). Determinamos o número de componentes conexas do caminho de cada raiz por *modelo*. Determinamos as componentes conexas de cada *molde*. Damos exemplos dos *moldes*. Discutimos a continuidade e a diferenciabilidade das duas raízes: elas são contínuas em seus domínios e as raízes simples são infinitamente diferenciáveis (com exceção da raiz dupla nula infinitamente diferenciável de $f_a(z) = az^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, as demais raízes duplas que aparecem no texto não são diferenciáveis). O fundamento teórico que dá suporte aos resultados aqui obtidos pertence à Análise Clássica. **Palavras-chave:** raízes da função quadrática; caminhos; molde; modelo; estilo.

Abstract

By fixing two real coefficients and varying the remaining real coefficient of the quadratic function, the *model* of the paths described by the two roots of the function in the complex plane is obtained (Yamaoka, 2023). A *style* is a set of *models* that are related to each other and share the same *mold* -structure- (except the *style* 4 originating from $f_a(z) = az^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, consisting of a single *model*). We determine the number of connected components of the path of each root per *model*. We determine the connected components of each *mold*. We give examples of the *molds*. We discuss the continuity and differentiability of the two roots: they are continuous in their domains and the simple roots are infinitely differentiable (with the exception of the infinitely differentiable zero double root of $f_a(z) = az^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, the other double roots that appear in the text are not differentiable). The theoretical foundation that supports the results obtained here belongs to Classical Analysis.

Keywords: roots of quadratic function; paths; mold; model; style.



1 Introdução

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = az^2 + bz + c$, onde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. As raízes complexas de f são $z_1 \doteq x_1 + y_1i = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (primeira raiz) e $z_2 \doteq x_2 + y_2i = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (segunda raiz), onde $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$.

Em Yamaoka (2023), determinamos no plano \mathbb{C} os caminhos descritos por ambas as raízes da função quadrática $f(z) = az^2 + bz + c$ quando fixamos dois dos três coeficientes reais e variamos o coeficiente remanescente. Ou seja, consideramos os três casos:

- Primeiro caso: b_0 e c_0 são fixados ; $f_a(z) = az^2 + b_0z + c_0$, $a \in \mathbb{R}^*$ (9 subcasos).
- Segundo caso: $a_0 \neq 0$ e c_0 são fixados; $f_b(z) = a_0z^2 + bz + c_0$, $b \in \mathbb{R}$ (6 subcasos).
- Terceiro caso: $a_0 \neq 0$ e b_0 são fixados; $f_c(z) = a_0z^2 + b_0z + c$, $c \in \mathbb{R}$ (6 subcasos).

Cada subcaso corresponde a um *modelo* dos caminhos descritos pelas duas raízes da função quadrática no plano complexo. Um *estilo* é um conjunto de modelos que têm relações entre si, e essas relações são dadas pelas relações existentes entre as raízes de um modelo e as de outro. Um *molde* é a estrutura comum aos modelos de um estilo.

Em Yamaoka (2023) e neste trabalho percebemos como as expressões algébricas das duas raízes da função quadrática, que nos acompanham desde os idos do que hoje corresponde ao Ensino Fundamental II, produzem resultados geométricos interessantes. Justamente por isso, é que podemos citar duas aplicações deste trabalho no âmbito educacional:

1) *Ferramenta adicional de apoio ao professor no Ensino Médio*. Quando determinamos os caminhos das duas raízes, de certa forma estamos associando as ideias de movimento e de repouso às duas raízes da função no plano. Isso pode contribuir para amenizar o impacto inicial quando da introdução dos números complexos não reais em sala de aula.

Tomemos como exemplo o modelo $M[(b_0 < 0, c_0 > 0)]$ (Figura 2). Para cada $b_0 < 0$ e para cada $c_0 > 0$, temos: quando $a < 0$, a 1ª raiz (real) decresce em $] - \infty, 0[$, e a 2ª raiz (real) cresce em $]0, -c_0/b_0[$; quando $0 < a \leq b_0^2/(4c_0)$, a 1ª raiz (real) decresce em $[-2c_0/b_0, +\infty[$, e a 2ª raiz (real) cresce em $] - c_0/b_0, -2c_0/b_0[$; e quando $a \geq b_0^2/(4c_0)$, a 1ª raiz parte de $-2c_0/b_0$ e percorre a semicircunferência superior em sentido anti-horário até pontos arbitrariamente próximos de 0 (exceto 0), e a 2ª raiz parte de $-2c_0/b_0$ e percorre a semicircunferência inferior em sentido horário até pontos arbitrariamente próximos de 0 (exceto 0).

Uma aplicação para esse mesmo modelo é atribuir um valor a $b_0 < 0$ e um a $c_0 > 0$, como fizemos no exemplo de Yamaoka (2023, p. 41). Em seguida, calculam-se $-c_0/b_0$, $-2c_0/b_0$ e $b_0^2/(4c_0)$, e rotulam-se os pedaços dos caminhos das duas raízes. Então, o professor atribui um valor $a_0 \neq 0$ ao coeficiente variável a e pede aos estudantes que indiquem em qual pedaço do caminho (ou rótulo) cada uma das duas raízes está localizada. Assim, o estudante poderá perceber o percurso que cada raiz fará para os valores $0 \neq a \geq a_0$.

No modelo $M[(b_0 = -2, c_0 = 1)]$, o professor pode mostrar que, à medida que a cresce no intervalo $0 < a < 1$, sobre o eixo real as duas raízes se aproximam, se encontram no ponto (1, 0) -posição da raiz dupla- quando $a = 1$ e percorrem as semicircunferências quando $a > 1$.

2) *Aplicações em cursos de Graduação*. Este trabalho pode auxiliar no ensino de Análise, de Álgebra e de Topologia básicas com o seu forte apelo geométrico.

No curso de Cálculo 2 (mas também em funções complexas), dentro do tópico de função de uma variável real a valores em \mathbb{R}^2 , pode-se provar a continuidade das duas raízes em seus domínios e, nos

modelos nos quais as raízes duplas existem, a não diferenciabilidade delas (exceto a diferenciabilidade da raiz dupla nula em $M[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$). A continuidade das duas raízes em seus domínios, bem como a não diferenciabilidade das raízes duplas, são então ilustradas com as Figuras.

No curso de Análise, as Figuras podem funcionar como recurso ilustrativo para destacar as propriedades notáveis dos caminhos das duas raízes, como as suas respectivas componentes conexas. Ali, deve-se chamar a atenção para o seguinte fato: *Em cada estilo a soma do número de componentes conexas da 1ª raiz é igual à soma do número de componentes conexas da 2ª raiz.* Ainda como recurso instrucional, reunimos, numa única Figura (tanto na Figura 38 quanto na Figura 39), a ilustração de conceitos básicos de Análise e de Topologia envolvendo os caminhos das duas raízes.

A estrutura do texto é: nas seções 3, 4, 5 definimos molde, modelo e estilo para os caminhos das raízes da função quadrática para os três casos mencionados acima e determinamos as componentes conexas de cada molde - visualmente, é simples a identificação destas componentes - baseados nos fundamentos teóricos da seção 2 e nos de 6.3. Na seção 2 especificamos os materiais utilizados nos moldes, que, do ponto de vista matemático, abrangem algumas definições e resultados da teoria dos conjuntos e da Análise. Em 6.1 estabelecemos as relações existentes entre dois modelos distintos quaisquer de um mesmo estilo. Em 6.2 fornecemos exemplos dos moldes. Em 6.4 tratamos da continuidade e da diferenciabilidade das duas raízes.

Nas Figuras, o símbolo \circ indica que o ponto não pertence ao caminho da raiz.

2 Materiais utilizados nos moldes

Definição 2.1 O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é definido como o conjunto de todos os pontos (a, b) onde a está em A e b está em B . É denotado por $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.

P.1) $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times B = \emptyset$, $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$, onde \emptyset é o conjunto vazio.

P.2) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$, onde A, B, C e D são conjuntos.

Definição 2.2 A reunião disjunta de n conjuntos (A_1, A_2, \dots, A_n) é a união de todos esses conjuntos, mas com a condição de que eles não tenham elementos em comum (ou seja, sejam disjuntos). Isso significa que a interseção de quaisquer dois conjuntos A_j e A_k é sempre um conjunto vazio, quando $j \neq k$.

Agora expomos definições e resultados extraídos de Lima (2000).

Definição 2.3 “A bola aberta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor do que r . Notação: $B(a; r)$ ” (Lima, 2000, p. 10).

Definição 2.4 Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que f é contínua no ponto $a \in X$ quando, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, se pode obter $\delta > 0$ tal que todo ponto $x \in X$ cuja distância ao ponto a seja menor do que δ é transformado por f num ponto $f(x)$ que dista de $f(a)$ menos que ϵ (Lima, 2000, p. 21).

Corolário 2.1 Dadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, seja $(f, g) : X \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ definida por $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$. Então (f, g) é contínua se, e somente se, f e g são contínuas (Lima, 2000, p. 25).

Definição 2.5 “Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in X$ chama-se um ponto interior a X quando é centro de alguma bola aberta contida em X ”(Lima, 2000, p. 34).

Definição 2.6 “Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores”(Lima, 2000, p. 34).

Definição 2.7 “Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando é limite de uma sequência de pontos desse conjunto”(Lima, 2000, p. 38).

Definição 2.8 “O conjunto dos pontos aderentes a X chama-se o fecho de X e é indicado com a notação \bar{X} ”(Lima, 2000, p. 38).

Definição 2.9 “Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se fechado quando contém todos seus pontos aderentes, isto é, quando $X = \bar{X}$ ”(Lima, 2000, p. 39).

Definição 2.10 “Uma cisão de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos A, B são ambos abertos e fechados em X ”(Lima, 2000, p. 54).

“Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite pelo menos a cisão trivial $X = X \cup \emptyset$ ”(Lima, 2000, p. 54).

Definição 2.11 “Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se conexo quando não admite outra cisão além da trivial”(Lima, 2000, p. 54).

Exemplo 2.1 “O conjunto vazio e um ponto $\{x\}$ são exemplos óbvios de conjuntos conexos”(Lima, 2000, p. 54).

Definição 2.12 “Quando existir uma cisão não trivial $X = A \cup B$, diremos que X é desconexo”(Lima, 2000, p. 54).

Teorema 2.1 “Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, é um intervalo”(Lima, 2000, p. 55).

Teorema 2.2 “A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo”(Lima, 2000, p. 55).

Teorema 2.3 “A reunião de uma família de conjuntos conexos com um ponto em comum é um conjunto conexo”(Lima, 2000, p. 57).

Corolário 2.2 “Dados $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, o produto cartesiano $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é conexo se, e somente se, X e Y são conexos”(Lima, 2000, p. 59).

Corolário 2.3 “O fecho de um conjunto conexo é conexo”(Lima, 2000, p. 59).

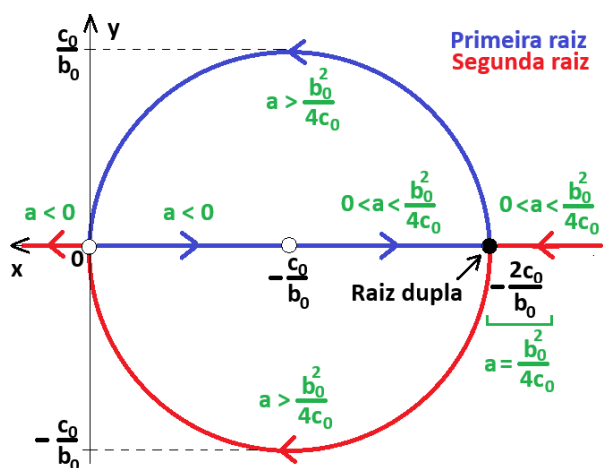
“Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se exprime como reunião disjunta de subconjuntos conexos máximos, chamados componentes conexas de X ”(Lima, 2000, p. 63).

A partir de agora damos início à conceituação de *moldes*, *modelos* e *estilos* para os caminhos das duas raízes quando fixamos dois coeficientes reais da função quadrática e variamos o coeficiente real remanescente.

3 Primeiro caso

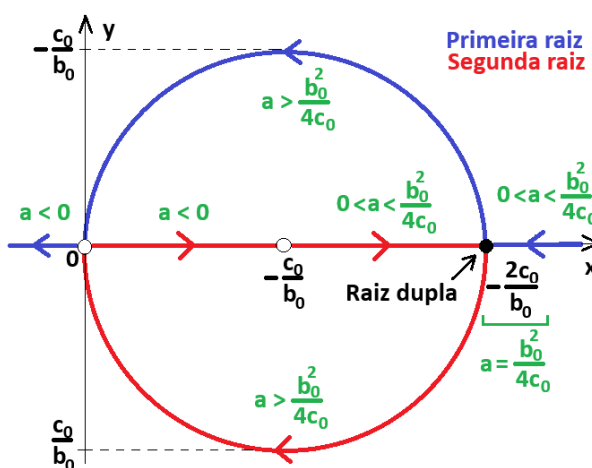
Em Yamaoka (2023), para o subcaso $(b_0 > 0, c_0 > 0)$ determinamos os caminhos da primeira e da segunda raízes representados na Figura 1(modelo) e denotada $M[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$. Para $(b_0 < 0, c_0 > 0)$, eles estão na Figura 2(modelo) e a denotamos $M[(b_0 < 0, c_0 > 0)]$. Para $(b_0 > 0, c_0 < 0)$, eles estão na Figura 3(modelo) e a denotamos $M[(b_0 > 0, c_0 < 0)]$. Para $(b_0 < 0, c_0 < 0)$, os caminhos estão na Figura 4 (modelo) denotada $M[(b_0 < 0, c_0 < 0)]$.

Figura 1: $M[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$



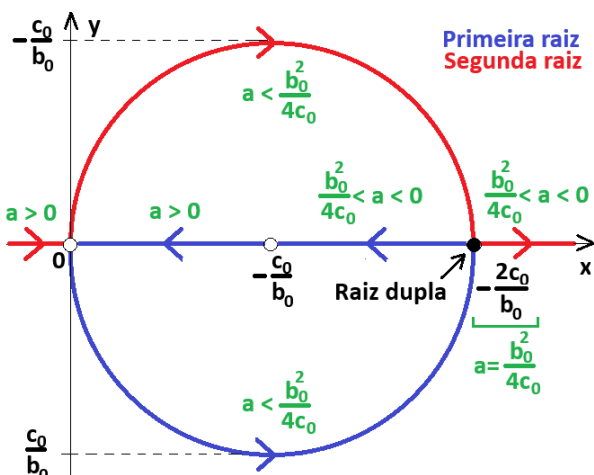
Fonte: Yamaoka (2023, p. 41)

Figura 2: $M[(b_0 < 0, c_0 > 0)]$



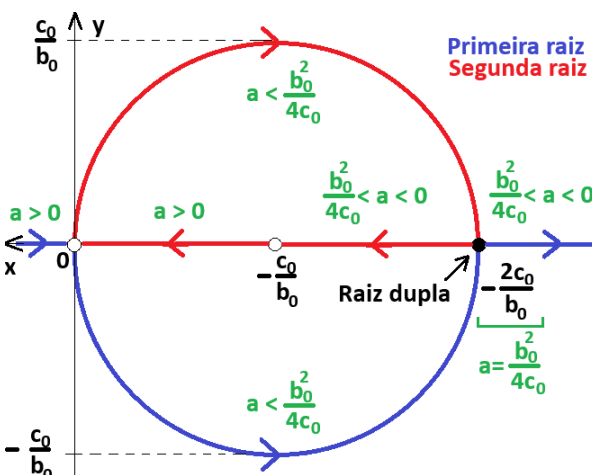
Fonte: Yamaoka (2023, p. 42)

Figura 3: $M[(b_0 > 0, c_0 < 0)]$



Fonte: Yamaoka (2023, p. 42)

Figura 4: $M[(b_0 < 0, c_0 < 0)]$

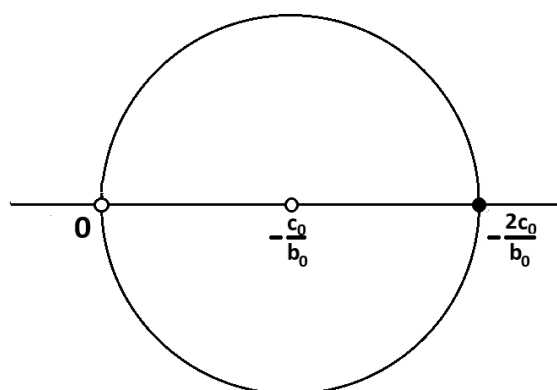


Fonte: Yamaoka (2023, p. 43)

Definamos o Estilo 1 como o conjunto formado pelos 4 modelos das Figuras 1 a 4 (veja 6.1 a1)). Observamos que estes 4 modelos apresentam uma “estrutura” comum (molde 1) sobre a qual repousam os caminhos das duas raízes, exposta na Figura 5, e a denotamos $MOL[(b_0 > 0, c_0 > 0), (b_0 < 0, c_0 > 0), (b_0 > 0, c_0 < 0), (b_0 < 0, c_0 < 0)]$.

Estudemos o número de componentes conexas do molde 1 da Figura 5 (veja também 6.3). Imaginemos que o eixo x esteja orientado para a esquerda e o eixo y para cima na Figura 5. (O resultado é o mesmo supondo o eixo x orientado para a direita.)

Figura 5: $MOL[(b_0 > 0, c_0 > 0), (b_0 < 0, c_0 > 0), (b_0 > 0, c_0 < 0), (b_0 < 0, c_0 < 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

Pelo Teorema 2.1, $]0, +\infty[$, $]-\frac{c_0}{b_0}, 0[$, $]-\frac{2c_0}{b_0}, -\frac{c_0}{b_0}[$, $]-\infty, -\frac{2c_0}{b_0}[$ são conexos. Do Exemplo 2.1, $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é conexo. Segue do Corolário 2.2 que $C_1 \doteq]0, +\infty[\times \{0\}$, $C_2 \doteq]-\frac{c_0}{b_0}, 0[\times \{0\}$, $]-\frac{2c_0}{b_0}, -\frac{c_0}{b_0}[\times \{0\}$ e $]-\infty, -\frac{2c_0}{b_0}[\times \{0\}$ são conexos.

Seja $f :]-\frac{2c_0}{b_0}, 0[\rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = \left(x, \sqrt{\left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - \left(x + \frac{c_0}{b_0}\right)^2}\right)$. Como as funções reais x e $\sqrt{\left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - \left(x + \frac{c_0}{b_0}\right)^2}$ são contínuas, vem do Corolário 2.1 que f é contínua. Como $]-\frac{2c_0}{b_0}, 0[$ é conexo (pelo Teorema 2.1) e f é contínua, segue do Teorema 2.2 que $f\left(]-\frac{2c_0}{b_0}, 0[\right)$ é conexo.

Seja $f_1 :]-\frac{2c_0}{b_0}, 0[\rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f_1(x) = \left(x, -\sqrt{\left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - \left(x + \frac{c_0}{b_0}\right)^2}\right)$. Como $]-\frac{2c_0}{b_0}, 0[$ é conexo e f_1 é contínua, segue novamente do Teorema 2.2 que $f_1\left(]-\frac{2c_0}{b_0}, 0[\right)$ é conexo.

Pelo Teorema 2.3, a reunião C_3 dos subconjuntos conexos $]-\frac{2c_0}{b_0}, -\frac{c_0}{b_0}[\times \{0\}$, $]-\infty, -\frac{2c_0}{b_0}[\times \{0\}$, $f\left(]-\frac{2c_0}{b_0}, 0[\right)$ e $f_1\left(]-\frac{2c_0}{b_0}, 0[\right)$ com o ponto comum $\left(-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right)$, onde $-\frac{2c_0}{b_0}$ é a raiz dupla, é um subconjunto conexo.

Provemos agora que $C_j \cap C_k = \emptyset, \forall j, k \in \{1, 2, 3\}, j \neq k$.

$$\begin{aligned} C_1 \cap C_2 &= (]0, +\infty[\times \{0\}) \cap (]-c_0/b_0, 0[\times \{0\}) \\ &\stackrel{P.2)}{=} (]0, +\infty[\cap]-c_0/b_0, 0[) \times (\{0\} \cap \{0\}) \\ &= \emptyset \times \{0\} \\ &\stackrel{P.1)}{=} \emptyset. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 \cap C_3 &= (]0, +\infty[\times \{0\}) \cap (([-2c_0/b_0, -c_0/b_0[\times \{0\}) \cup (]-\infty, -2c_0/b_0[\times \{0\}) \\ &\quad \cup f([-2c_0/b_0, 0]) \cup f_1([-2c_0/b_0, 0])) \end{aligned}$$

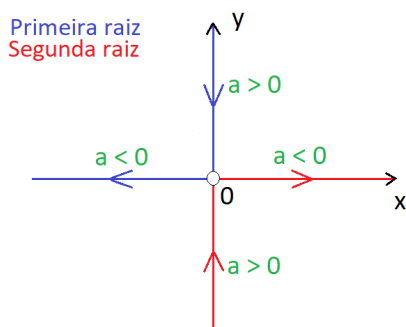
$$\begin{aligned}
C_1 \cap C_3 &= ((]0, +\infty[\times \{0\}) \cap ([-2c_0/b_0, -c_0/b_0[\times \{0\})) \\
&\quad \cup ((]0, +\infty[\times \{0\}) \cap (]-\infty, -2c_0/b_0] \times \{0\})) \\
&\quad \cup ((]0, +\infty[\times \{0\}) \cap f([-2c_0/b_0, 0[)) \\
&\quad \cup ((]0, +\infty[\times \{0\}) \cap f_1([-2c_0/b_0, 0[)) \\
&\stackrel{P.2)}{=} ((]0, +\infty[\cap [-2c_0/b_0, -c_0/b_0[\times \{0\}) \cup ((]0, +\infty[\cap]-\infty, -2c_0/b_0] \times \{0\})) \\
&\quad \cup \left(\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}_+^*\} \cap \left\{ \left(x, \sqrt{\left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - \left(x + \frac{c_0}{b_0}\right)^2} \right) | x \in \left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right] \right\} \right) \\
&\quad \cup \left(\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}_+^*\} \cap \left\{ \left(x, -\sqrt{\left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - \left(x + \frac{c_0}{b_0}\right)^2} \right) | x \in \left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right] \right\} \right) \\
&= (\emptyset \times \{0\}) \cup (\emptyset \times \{0\}) \\
&\quad \cup \left(\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}_+^*\} \cap \left\{ (x, \sqrt{\dots}) | x \in \left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right] \right\} \right) \\
&\quad \cup \left(\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}_+^*\} \cap \left\{ (x, -\sqrt{\dots}) | x \in \left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right] \right\} \right) \\
&\stackrel{P.1)}{=} \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset, \text{ pois } \mathbb{R}_+^* \cap \left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right] = \emptyset \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 \cap C_3 &\stackrel{P.2)}{=} ((]-c_0/b_0, 0[\cap [-2c_0/b_0, -c_0/b_0[\times \{0\}) \cup ((]-c_0/b_0, 0[\cap]-\infty, -2c_0/b_0] \times \{0\})) \\
&\quad \cup \left(\{(x, 0) | x \in \left[-\frac{c_0}{b_0}, 0\right]\} \cap \left(\left\{ \left(-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right) \right\} \cup \left\{ \left(x, \sqrt{\left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - \left(x + \frac{c_0}{b_0}\right)^2} \right) | x \in \left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right] \right\} \right) \right) \\
&\quad \cup \left(\{(x, 0) | x \in \left[-\frac{c_0}{b_0}, 0\right]\} \cap \left(\left\{ \left(-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right) \right\} \cup \left\{ \left(x, -\sqrt{\left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - \left(x + \frac{c_0}{b_0}\right)^2} \right) | x \in \left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right] \right\} \right) \right) \\
&= (\emptyset \times \{0\}) \cup (\emptyset \times \{0\}) \\
&\quad \cup \left(\left(\{(x, 0) | x \in \left[-\frac{c_0}{b_0}, 0\right]\} \cap \left\{ \left(-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right) \right\} \right) \cup \left(\{(x, 0) | x \in \left[-\frac{c_0}{b_0}, 0\right]\} \cap \left\{ (x, \sqrt{\dots}) | x \in \left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right] \right\} \right) \right) \\
&\quad \cup \left(\left(\{(x, 0) | x \in \left[-\frac{c_0}{b_0}, 0\right]\} \cap \left\{ \left(-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right) \right\} \right) \cup \left(\{(x, 0) | x \in \left[-\frac{c_0}{b_0}, 0\right]\} \cap \left\{ (x, -\sqrt{\dots}) | x \in \left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0\right] \right\} \right) \right) \\
&\stackrel{P.1)}{=} \emptyset \cup \emptyset \cup (\emptyset \cup \emptyset) \cup (\emptyset \cup \emptyset), \text{ pois } -2c_0/b_0 \notin]-c_0/b_0, 0[\text{ e } \sqrt{\dots} \neq 0. \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Portanto, $m_1 \doteq C_1 \cup C_2 \cup C_3$ é a reunião disjunta das componentes conexas C_1 , C_2 e C_3 .

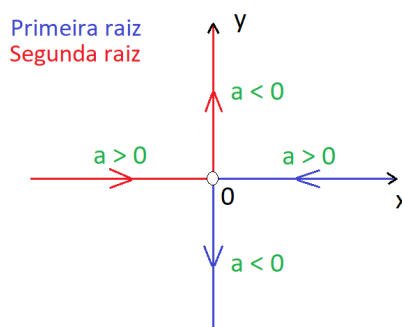
Em Yamaoka (2023), para o subcaso ($b_0 = 0$, $c_0 > 0$) determinamos os caminhos da primeira e da segunda raízes representados na Figura 6(modelo) e a denotamos $M[(b_0 = 0, c_0 > 0)]$. Para ($b_0 = 0$, $c_0 < 0$), os caminhos estão na Figura 7(modelo) e a denotamos $M[(b_0 = 0, c_0 < 0)]$.

Figura 6: $M[(b_0 = 0, c_0 > 0)]$



Fonte: Yamaoka (2023, p. 44)

Figura 7: $M[(b_0 = 0, c_0 < 0)]$

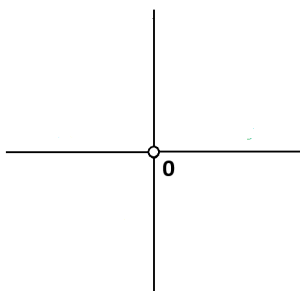


Fonte: Yamaoka (2023, p. 45)

Definamos o Estilo 2 como o conjunto formado pelos 2 modelos das Figuras 6 e 7 (veja 6.1 a2)). Observamos que estes 2 modelos apresentam uma “estrutura” comum (molde 2) sobre a qual repousam os caminhos das duas raízes, exposta na Figura 8, e a denotamos $MOL[(b_0 = 0, c_0 > 0), (b_0 = 0, c_0 < 0)]$.

Examinemos o número de componentes conexas do molde 2 da Figura 8 (veja também 6.3). Imaginemos que o eixo x esteja orientado para a direita e o eixo y para cima na Figura 8.

Figura 8: $MOL[(b_0 = 0, c_0 > 0), (b_0 = 0, c_0 < 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

Pelo Teorema 2.1, $] - \infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são conexos. Do Exemplo 2.1, $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é conexo. Segue do Corolário 2.2 que $C_1 \doteq] - \infty, 0[\times\{0\}$, $C_2 \doteq]0, +\infty[\times\{0\}$, $C_3 \doteq \{0\}\times] - \infty, 0[$ e $C_4 \doteq \{0\}\times]0, +\infty[$ são conexos. Agora, $m_2 \doteq C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ é reunião disjunta de C_1, C_2, C_3, C_4 , pois

$$C_1 \cap C_2 = (] - \infty, 0[\times\{0\}) \cap (]0, +\infty[\times\{0\}) \stackrel{P.2)}{=} (] - \infty, 0[\cap]0, +\infty[) \times (\{0\} \cap \{0\}) = \emptyset \times \{0\} \stackrel{P.1)}{=} \emptyset.$$

$$C_1 \cap C_3 = (] - \infty, 0[\times\{0\}) \cap (\{0\}\times] - \infty, 0[) \stackrel{P.2)}{=} (] - \infty, 0[\cap \{0\}) \times (\{0\} \cap] - \infty, 0[) = \emptyset \times \emptyset \stackrel{P.1)}{=} \emptyset.$$

$$C_1 \cap C_4 = (] - \infty, 0[\times\{0\}) \cap (\{0\}\times]0, +\infty[) \stackrel{P.2)}{=} (] - \infty, 0[\cap \{0\}) \times (\{0\} \cap]0, +\infty[) = \emptyset \times \emptyset \stackrel{P.1)}{=} \emptyset.$$

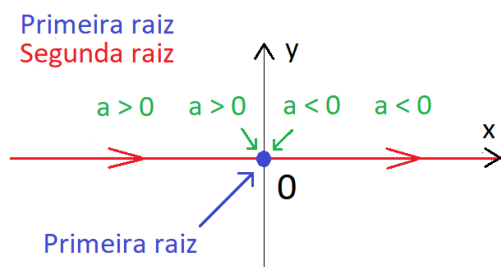
$$C_2 \cap C_3 = (]0, +\infty[\times\{0\}) \cap (\{0\}\times] - \infty, 0[) \stackrel{P.2)}{=} (]0, +\infty[\cap \{0\}) \times (\{0\} \cap] - \infty, 0[) = \emptyset \times \emptyset \stackrel{P.1)}{=} \emptyset.$$

$$C_2 \cap C_4 = (]0, +\infty[\times\{0\}) \cap (\{0\}\times]0, +\infty[) \stackrel{P.2)}{=} (]0, +\infty[\cap \{0\}) \times (\{0\} \cap]0, +\infty[) = \emptyset \times \emptyset \stackrel{P.1)}{=} \emptyset.$$

$$C_3 \cap C_4 = (\{0\}\times] - \infty, 0[) \cap (\{0\}\times]0, +\infty[) \stackrel{P.2)}{=} (\{0\} \cap \{0\}) \times (] - \infty, 0[\cap]0, +\infty[) = \{0\} \times \emptyset \stackrel{P.1)}{=} \emptyset.$$

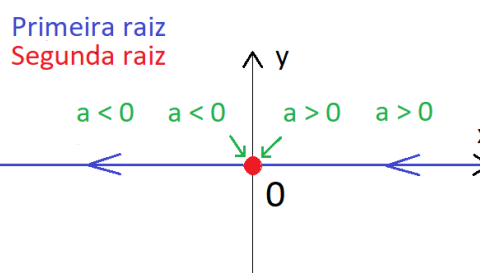
Em Yamaoka (2023), para o subcaso $(b_0 > 0, c_0 = 0)$ determinamos os caminhos da primeira e da segunda raízes representados na Figura 9(modelo) e a denotamos $M[(b_0 > 0, c_0 = 0)]$. Para $(b_0 < 0, c_0 = 0)$, os caminhos estão na Figura 10(modelo) e a denotamos $M[(b_0 < 0, c_0 = 0)]$.

Figura 9: $M[(b_0 > 0, c_0 = 0)]$



Fonte: Yamaoka (2023, p. 46)

Figura 10: $M[(b_0 < 0, c_0 = 0)]$

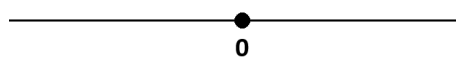


Fonte: Yamaoka (2023, p. 46)

Definamos o Estilo 3 como o conjunto formado pelos 2 modelos das Figuras 9 e 10 (veja 6.1 a3)). Observamos que estes 2 modelos apresentam uma “estrutura” comum (molde 3) sobre a qual repousam os caminhos das duas raízes, exposta na Figura 11, e a denotamos $MOL[(b_0 > 0, c_0 = 0), (b_0 < 0, c_0 = 0)]$.

Estudemos o número de componentes conexas do molde 3 da Figura 11 (veja também 6.3). Imaginemos que o eixo x esteja orientado para a direita e o eixo y para cima na Figura 11.

Figura 11: $MOL[(b_0 > 0, c_0 = 0), (b_0 < 0, c_0 = 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

Definimos $C_1 =]-\infty, 0[$ e $C_2 =]0, +\infty[$. Note que $C_1 \cup C_2$ é o conjunto sobre o qual repousa o caminho de uma das duas raízes; a outra raiz é o conjunto $\{0\}$. Pelo Corolário 2.3, $\bar{C}_1 =]-\infty, 0]$ é conexo e $\bar{C}_2 = [0, +\infty[$ é conexo. Pelo Teorema 2.3, a reunião m_3 dos subconjuntos conexos \bar{C}_1 e \bar{C}_2 com o ponto comum $\{0\}$ é um conjunto conexo. Portanto, o eixo real é a única componente conexa de m_3 .

Em Yamaoka (2023), para o subcaso $(b_0 = 0, c_0 = 0)$ determinamos os caminhos da primeira e da segunda raízes ($z_1(a) = z_2(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}^*$), cujo modelo é denotado $M[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$. Neste caso, o molde 4, denotado $MOL[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$, está representado na Figura 12.

Figura 12: $MOL[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$



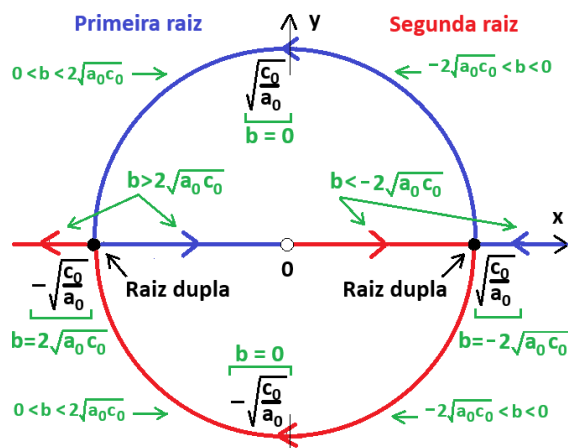
Fonte: elaborada pelo autor

Definamos o Estilo 4 como o conjunto constituído pelo modelo denotado $M[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$. O conjunto $m_4 = \{0\}$ é a única componente conexa (veja também 6.3).

4 Segundo caso

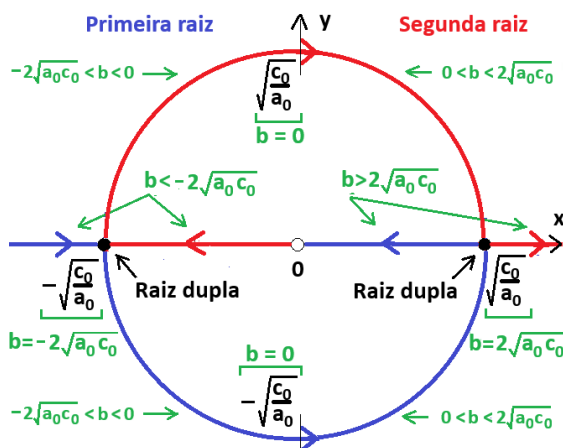
Em Yamaoka (2023), para o subcaso $(a_0 > 0, c_0 > 0)$ determinamos os caminhos da primeira e da segunda raízes representados na Figura 13(modelo) e a denotamos $M[(a_0 > 0, c_0 > 0)]$. Para $(a_0 < 0, c_0 < 0)$, os caminhos estão na Figura 14(modelo) e denotada $M[(a_0 < 0, c_0 < 0)]$.

Figura 13: $M[(a_0 > 0, c_0 > 0)]$



Fonte: Yamaoka (2023, p. 50)

Figura 14: $M[(a_0 < 0, c_0 < 0)]$

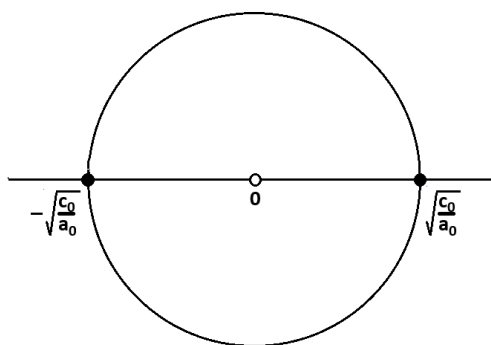


Fonte: Yamaoka (2023, p. 51)

Definamos o Estilo 1 como o conjunto formado pelos 2 modelos das Figuras 13 e 14 (veja 6.1 b1)). Os 2 modelos apresentam uma “estrutura” comum (molde 1) sobre a qual repousam os caminhos das duas raízes, que é exposta na Figura 15 e denotada $MOL[(a_0 > 0, c_0 > 0), (a_0 < 0, c_0 < 0)]$.

Examinemos o número de componentes conexas do molde 1 da Figura 15 (veja também 6.3). O eixo x deve estar orientado para a direita e o eixo y para cima na Figura 15.

Figura 15: $MOL[(a_0 > 0, c_0 > 0), (a_0 < 0, c_0 < 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

Sejam $C_1 \doteq]-\infty, -\sqrt{c_0/a_0}] \times \{0\}$, $C_2 \doteq [-\sqrt{c_0/a_0}, 0[\times \{0\}$, $C_3 \doteq]0, \sqrt{c_0/a_0}] \times \{0\}$, $C_4 \doteq [\sqrt{c_0/a_0}, +\infty[\times \{0\}$. Pelo Teorema 2.1, $]-\infty, -\sqrt{c_0/a_0}]$, $[-\sqrt{c_0/a_0}, 0[$, $]0, \sqrt{c_0/a_0}]$ e $[\sqrt{c_0/a_0}, +\infty[$ são conexos. Do Exemplo 2.1, $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é conexo. Resulta do Corolário 2.2 que C_1, C_2, C_3 e C_4 são conexos.

Seja $f : [-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x, \sqrt{(c_0/a_0) - x^2})$. Como as funções reais x e $\sqrt{(c_0/a_0) - x^2}$ são contínuas, vem do Corolário 2.1 que f é contínua. Como $[-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}]$ é conexo e f é contínua, segue do Teorema 2.2 que $f([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}])$ é conexo.

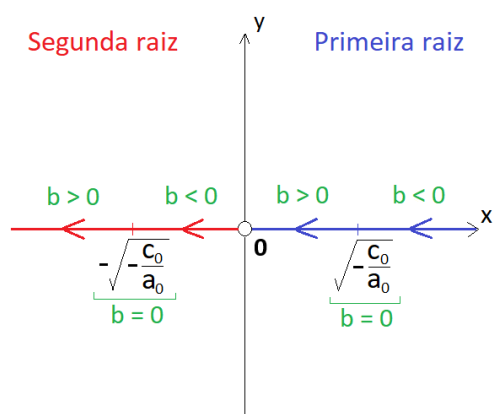
Seja $f_1 : [-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_1(x) = (x, -\sqrt{(c_0/a_0) - x^2})$. Como $[-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}]$ é conexo e f_1 é contínua, segue novamente do Teorema 2.2 que $f_1([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}])$ é conexo.

Pelo Teorema 2.3, a reunião *aux* dos subconjuntos conexos $C_1, C_2, f([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}])$ e $f_1([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}])$ - isto é, $]-\infty, -\sqrt{c_0/a_0}] \times \{0\}, [-\sqrt{c_0/a_0}, 0] \times \{0\}, f([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}])$ e $f_1([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}])$ - com o ponto comum $(-\sqrt{c_0/a_0}, 0)$, onde $-\sqrt{c_0/a_0}$ é uma raiz dupla, é um conjunto conexo.

Finalmente, pelo Teorema 2.3, a reunião m_1 dos subconjuntos conexos C_3, C_4, aux - isto é, $]0, \sqrt{c_0/a_0}] \times \{0\}, [\sqrt{c_0/a_0}, +\infty[\times \{0\}, C_1 \cup C_2 \cup f([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}]) \cup f_1([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}])$ - com o ponto comum $(\sqrt{c_0/a_0}, 0)$, onde $\sqrt{c_0/a_0}$ é uma raiz dupla, é um conjunto conexo. Portanto, m_1 é a única componente conexa.

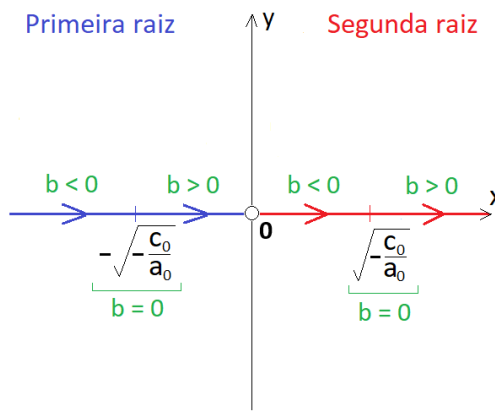
Em Yamaoka (2023), para o subcaso $(a_0 > 0, c_0 < 0)$ determinamos os caminhos da primeira e da segunda raízes representados na Figura 16(modelo) e a denotamos $M[(a_0 > 0, c_0 < 0)]$. Para $(a_0 < 0, c_0 > 0)$, os caminhos estão na Figura 17(modelo) e denotada $M[(a_0 < 0, c_0 > 0)]$.

Figura 16: $M[(a_0 > 0, c_0 < 0)]$



Fonte: Yamaoka (2023, p. 52)

Figura 17: $M[(a_0 < 0, c_0 > 0)]$

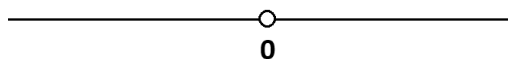


Fonte: Yamaoka (2023, p. 52)

Definamos o Estilo 2 como o conjunto formado pelos 2 modelos das Figuras 16 e 17 (veja 6.1 b2)). Os 2 modelos apresentam uma “estrutura” comum (molde 2) sobre a qual repousam os caminhos das duas raízes, que é exposta na Figura 18 e denotada $MOL[(a_0 > 0, c_0 < 0), (a_0 < 0, c_0 > 0)]$.

Examinemos o número de componentes conexas do molde 2 da Figura 18 (veja também 6.3). Imaginemos que o eixo x esteja orientado para a direita e o eixo y para cima na Figura 18.

Figura 18: $MOL[(a_0 > 0, c_0 < 0), (a_0 < 0, c_0 > 0)]$

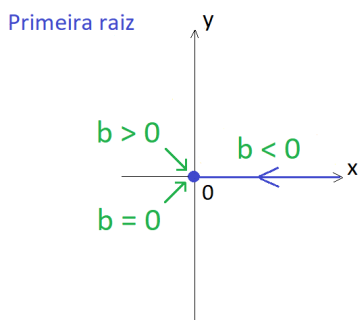


Fonte: elaborada pelo autor

Seja $m_2 \doteq]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Pelo Teorema 2.1, $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são conexos. Como $]-\infty, 0[\cap]0, +\infty[= \emptyset$ resulta que m_2 é a reunião disjunta das componentes conexas $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$.

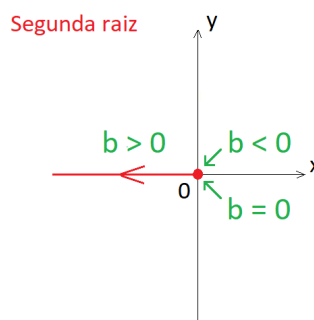
Em Yamaoka (2023), para o subcaso $(a_0 > 0, c_0 = 0)$ determinamos os caminhos da primeira e da segunda raízes representados nas Figuras 19 e 20(modelo) e as denotamos $M[(a_0 > 0, c_0 = 0)]$. Para $(a_0 < 0, c_0 = 0)$, eles estão nas Figuras 21 e 22(modelo) e as denotamos $M[(a_0 < 0, c_0 = 0)]$.

Figura 19: $M[(a_0 > 0, c_0 = 0)]$



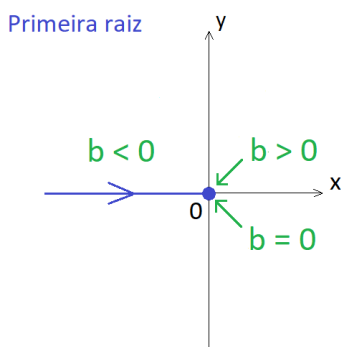
Fonte: Yamaoka (2023, p. 53)

Figura 20: $M[(a_0 > 0, c_0 = 0)]$



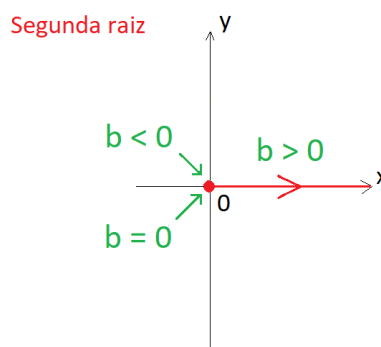
Fonte: Yamaoka (2023, p. 53)

Figura 21: $M[(a_0 < 0, c_0 = 0)]$



Fonte: Yamaoka (2023, p. 54)

Figura 22: $M[(a_0 < 0, c_0 = 0)]$

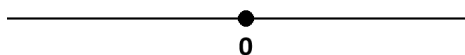


Fonte: Yamaoka (2023, p. 54)

Definamos o Estilo 3 como o conjunto formado pelo modelo das Figuras 19 e 20 e pelo modelo das Figuras 21 e 22 (veja 6.1 b3)). Observamos que estes 2 modelos apresentam uma “estrutura” comum (molde 3) sobre a qual repousam os caminhos das duas raízes, que é exposta na Figura 23, e a denotamos $MOL[(a_0 > 0, c_0 = 0), (a_0 < 0, c_0 = 0)]$.

Examinemos o número de componentes conexas do molde 3 da Figura 23 (veja também 6.3). Imaginemos que o eixo x esteja orientado para a direita e o eixo y para cima na Figura 23.

Figura 23: $MOL[(a_0 > 0, c_0 = 0), (a_0 < 0, c_0 = 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

Sejam $] - \infty, 0]$ e $[0, +\infty[$. Pelo Teorema 2.1, $] - \infty, 0]$ e $[0, +\infty[$ são conexos. Pelo Teorema 2.3, a reunião m_3 dos subconjuntos conexos $] - \infty, 0]$ e $[0, +\infty[$ com o ponto comum 0 - raiz dupla - é um conjunto conexo, ou seja, $m_3 = \mathbb{R}$ é a única componente conexa.

5 Terceiro caso

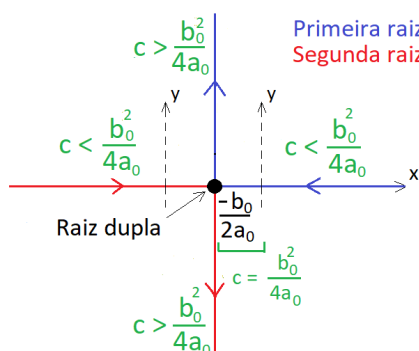
Em Yamaoka (2023), para o subcaso $(a_0 > 0, b_0 > 0)$ determinamos os caminhos da primeira e da segunda raízes e o denotamos como modelo $M[(a_0 > 0, b_0 > 0)]$. Para $(a_0 > 0, b_0 < 0)$,

denotamos o subcaso como modelo $M[(a_0 > 0, b_0 < 0)]$. Para $(a_0 < 0, b_0 < 0)$, denotamos o subcaso como modelo $M[(a_0 < 0, b_0 < 0)]$. E para $(a_0 < 0, b_0 > 0)$, denotamos o subcaso como modelo $M[(a_0 < 0, b_0 > 0)]$.

A Figura 24 representa modelos simétricos correspondentes. Olhando de frente, quando o eixo y está à direita, temos $M[(a_0 > 0, b_0 > 0)]$. Quando está à esquerda, temos $M[(a_0 > 0, b_0 < 0)]$.

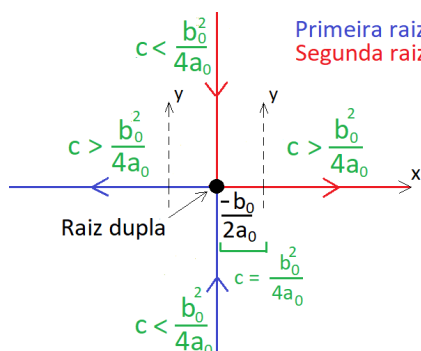
A Figura 25 representa modelos simétricos correspondentes. Olhando de frente, quando o eixo y está à direita, temos $M[(a_0 < 0, b_0 < 0)]$. Quando está à esquerda, temos $M[(a_0 < 0, b_0 > 0)]$.

Figura 24:
Modelos simétricos 1



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 25:
Modelos simétricos 2

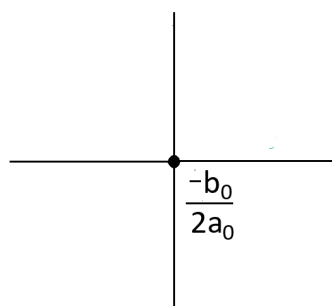


Fonte: elaborada pelo autor

Definamos o Estilo 1 como o conjunto formado pelos 4 modelos das Figuras 24 e 25 (veja 6.1 c1)). Estes 4 modelos apresentam uma “estrutura” comum (molde 1) sobre a qual repousam os caminhos das duas raízes, exposta na Figura 26 e denotada $MOL[(a_0 > 0, b_0 > 0), (a_0 > 0, b_0 < 0), (a_0 < 0, b_0 < 0), (a_0 < 0, b_0 > 0)]$.

Estudemos o número de componentes conexas do molde 1 da Figura 26 (veja também 6.3). Imaginemos que o eixo x esteja orientado para a direita e o eixo y para cima na Figura 26.

Figura 26: $MOL[(a_0 > 0, b_0 > 0), (a_0 > 0, b_0 < 0), (a_0 < 0, b_0 < 0), (a_0 < 0, b_0 > 0)]$

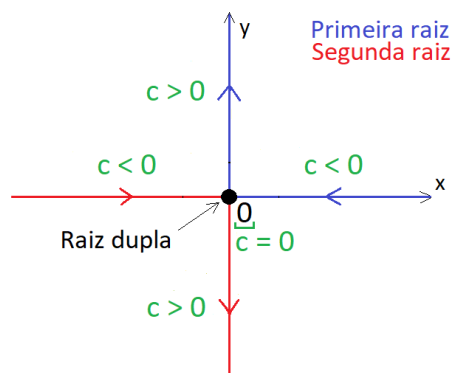


Fonte: elaborada pelo autor

Pelo Teorema 2.1, $] - \infty, -b_0/2a_0]$, $[-b_0/2a_0, +\infty[$, $] - \infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são conexos. Pelo Corolário 2.3, $] - \infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são conexos. Do Exemplo 2.1, $\{0\} \subset \mathbb{R}$ e $\{-b_0/2a_0\}$ são conexos. Segue do Corolário 2.2 que $C_1 \doteq] - \infty, -b_0/2a_0] \times \{0\}$, $C_2 \doteq [-b_0/2a_0, +\infty[\times \{0\}$, $C_3 \doteq \{-b_0/2a_0\} \times] - \infty, 0[$ e $C_4 \doteq \{-b_0/2a_0\} \times]0, +\infty[$ são conexos. Pelo Teorema 2.3, a reunião m_1 dos subconjuntos conexos C_1, C_2, C_3 e C_4 com o ponto comum $(-b_0/2a_0, 0)$, onde $-b_0/2a_0$ é a raiz dupla, é um conjunto conexo, ou seja, m_1 é a única componente conexa.

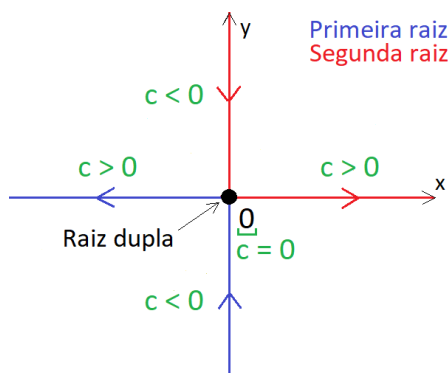
Em Yamaoka (2023), para o subcaso $(a_0 > 0, b_0 = 0)$ determinamos os caminhos da primeira e da segunda raízes representados na Figura 27(modelo) denotada $M[(a_0 > 0, b_0 = 0)]$. Para $(a_0 < 0, b_0 = 0)$, os caminhos estão na Figura 28(modelo) denotada $M[(a_0 < 0, b_0 = 0)]$.

Figura 27:
 $M[(a_0 > 0, b_0 = 0)]$



Fonte: Yamaoka (2023, p. 58)

Figura 28:
 $M[(a_0 < 0, b_0 = 0)]$



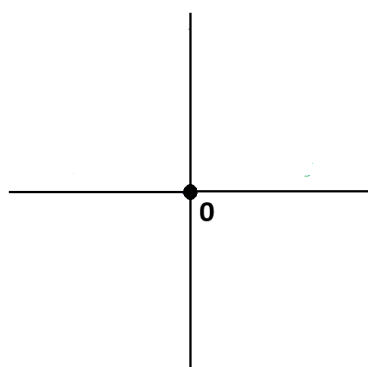
Fonte: Yamaoka (2023, p. 58)

Definamos o Estilo 2 como o conjunto formado pelos 2 modelos das Figuras 27 e 28 (veja 6.1 c2)). Os 2 modelos apresentam uma “estrutura” comum (molde 2) sobre a qual repousam os caminhos das duas raízes, exposta na Figura 29 e denotada $MOL[(a_0 > 0, b_0 = 0), (a_0 < 0, b_0 = 0)]$.

Estudemos o número de componentes conexas do molde 2 da Figura 29 (veja também 6.3). Imaginemos que o eixo x esteja orientado para a direita e o eixo y para cima na Figura 29.

Pelo Teorema 2.1, $] - \infty, 0[$, $[0, +\infty[$, $] - \infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são conexos. Pelo Corolário 2.3, o fecho de $] - \infty, 0[$, que é $] - \infty, 0]$, e o fecho de $]0, +\infty[$, que é $[0, +\infty[$, são conexos. Do Exemplo 2.1, $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é conexo. Segue do Corolário 2.2 que $C_1 \doteq] - \infty, 0] \times \{0\}$, $C_2 \doteq [0, +\infty[\times \{0\}$, $C_3 \doteq \{0\} \times] - \infty, 0]$ e $C_4 \doteq \{0\} \times [0, +\infty[$ são conexos. Pelo Teorema 2.3, a reunião m_2 dos subconjuntos conexos C_1, C_2, C_3 e C_4 com o ponto comum $(0, 0)$, onde o primeiro 0 é a raiz dupla, é um conjunto conexo, ou seja, m_2 é a única componente conexa.

Figura 29: $MOL[(a_0 > 0, b_0 = 0), (a_0 < 0, b_0 = 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

6 Apêndice

6.1 Estilos

Aqui estabelecemos as relações existentes entre dois modelos distintos quaisquer de um mesmo estilo.

a) Primeiro caso

a1) Estilo 1

Definamos

modelo 1 : $M[(b_{01} > 0, c_{01} > 0)]$

modelo 2 : $M[(b_{02} < 0, c_{02} > 0)]$

modelo 3 : $M[(b_{03} > 0, c_{03} < 0)]$

modelo 4 : $M[(b_{04} < 0, c_{04} < 0)]$.

Façamos

$$b_{02} = -b_{01}, c_{02} = c_{01}$$

$$b_{03} = b_{01}, c_{03} = -c_{01}$$

$$b_{04} = -b_{01}, c_{04} = -c_{01}$$

$$b_{03} = -b_{02}, c_{03} = -c_{02}$$

$$b_{04} = b_{02}, c_{04} = -c_{02}$$

$$b_{04} = -b_{03}, c_{04} = c_{03}.$$

Usemos a notação $z_{j,k}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4$, para denotar a j -ésima raiz do modelo k .

Existem $\binom{4}{2} = 6$ relações. Temos, $\forall a \in \mathbb{R}^*$,

$$z_{1,2}(a) = -z_{2,1}(a) \quad \text{e} \quad z_{2,2}(a) = -z_{1,1}(a) \quad (\text{Relação entre o modelo 1 e o modelo 2})$$

$$z_{1,3}(a) = -z_{1,1}(-a) \quad \text{e} \quad z_{2,3}(a) = -z_{2,1}(-a) \quad (\text{Relação entre o modelo 1 e o modelo 3})$$

$$z_{1,4}(a) = z_{2,1}(-a) \quad \text{e} \quad z_{2,4}(a) = z_{1,1}(-a) \quad (\text{Relação entre o modelo 1 e o modelo 4})$$

$$z_{1,3}(a) = z_{2,2}(-a) \quad \text{e} \quad z_{2,3}(a) = z_{1,2}(-a) \quad (\text{Relação entre o modelo 2 e o modelo 3})$$

$$z_{1,4}(a) = -z_{1,2}(-a) \quad \text{e} \quad z_{2,4}(a) = -z_{2,2}(-a) \quad (\text{Relação entre o modelo 2 e o modelo 4})$$

$$z_{1,4}(a) = -z_{2,3}(a) \quad \text{e} \quad z_{2,4}(a) = -z_{1,3}(a) \quad (\text{Relação entre o modelo 3 e o modelo 4}).$$

Provemos a relação entre o modelo 1 e o modelo 2 acima (as demais são similares): $\forall a \in \mathbb{R}^*$,

$$z_{1,2}(a) = \frac{-b_{02} + \sqrt{b_{02}^2 - 4ac_{02}}}{2a} = \frac{b_{01} + \sqrt{b_{01}^2 - 4ac_{01}}}{2a} = - \left(\frac{-b_{01} - \sqrt{b_{01}^2 - 4ac_{01}}}{2a} \right) = -z_{2,1}(a), \quad (1)$$

$$z_{2,2}(a) = \frac{-b_{02} - \sqrt{b_{02}^2 - 4ac_{02}}}{2a} = \frac{b_{01} - \sqrt{b_{01}^2 - 4ac_{01}}}{2a} = - \left(\frac{-b_{01} + \sqrt{b_{01}^2 - 4ac_{01}}}{2a} \right) = -z_{1,1}(a), \quad (2)$$

a2) Estilo 2

Definamos

modelo 5 : $M[(b_{05} = 0, c_{05} > 0)]$

modelo 6 : $M[(b_{06} = 0, c_{06} < 0)]$.

Façamos

$$b_{06} = b_{05}, c_{06} = -c_{05}.$$

Usemos a notação $z_{j,k}$, $j = 1, 2$, $k = 5, 6$, para denotar a j -ésima raiz do modelo k .

Existe $\binom{2}{2} = 1$ relação. Temos, $\forall a \in \mathbb{R}^*$,

$$z_{1,6}(a) = z_{2,5}(-a) = -z_{1,5}(-a) \quad \text{e} \quad z_{2,6}(a) = z_{1,5}(-a) = -z_{2,5}(-a).$$

a3) Estilo 3

Definamos

modelo 7 : $M[(b_{07} > 0, c_{07} = 0)]$

modelo 8 : $M[(b_{08} < 0, c_{08} = 0)]$.

Façamos

$$b_{08} = -b_{07}, c_{08} = c_{07}.$$

Usemos a notação $z_{j,k}$, $j = 1, 2$, $k = 7, 8$, para denotar a j -ésima raiz do modelo k .

Existe $\binom{2}{2} = 1$ relação. Temos, $\forall a \in \mathbb{R}^*$,

$$z_{1,8}(a) = -z_{2,7}(a) \quad \text{e} \quad z_{2,8}(a) = -z_{1,7}(a) = 0.$$

b) Segundo caso

b1) Estilo 1

Definamos

modelo 1 : $M[(a_{01} > 0, c_{01} > 0)]$

modelo 2 : $M[(a_{02} < 0, c_{02} < 0)]$.

Façamos

$$a_{02} = -a_{01}, c_{02} = -c_{01}.$$

Usemos a notação $z_{j,k}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2$, para denotar a j -ésima raiz do modelo k .

Existe $\binom{2}{2} = 1$ relação. Temos, $\forall b \in \mathbb{R}$,

$$z_{1,2}(b) = -z_{1,1}(b) \quad \text{e} \quad z_{2,2}(b) = -z_{2,1}(b).$$

b2) Estilo 2

Definamos

modelo 3 : $M[(a_{03} > 0, c_{03} < 0)]$

modelo 4 : $M[(a_{04} < 0, c_{04} > 0)]$.

Façamos

$$a_{04} = -a_{03}, c_{04} = -c_{03}.$$

Usemos a notação $z_{j,k}$, $j = 1, 2$, $k = 3, 4$, para denotar a j -ésima raiz do modelo k .

Existe $\binom{2}{2} = 1$ relação. Temos, $\forall b \in \mathbb{R}$,

$$z_{1,4}(b) = -z_{1,3}(b) \quad \text{e} \quad z_{2,4}(b) = -z_{2,3}(b).$$

b3) Estilo 3

Definamos

modelo 5 : $M[(a_{05} > 0, c_{05} = 0)]$

modelo 6 : $M[(a_{06} < 0, c_{06} = 0)]$.

Façamos

$$a_{06} = -a_{05}, c_{06} = c_{05} = 0.$$

Usemos a notação $z_{j,k}$, $j = 1, 2$, $k = 5, 6$, para denotar a j -ésima raiz do modelo k .

Existe $\binom{2}{2} = 1$ relação. Temos, $\forall b \in \mathbb{R}$,

$$z_{1,6}(b) = -z_{1,5}(b) \quad \text{e} \quad z_{2,6}(b) = -z_{2,5}(b).$$

c) Terceiro caso

c1) Estilo 1

Definamos

modelo 1 : $M[(a_{01} > 0, b_{01} > 0)]$

modelo 2 : $M[(a_{02} > 0, b_{02} < 0)]$

modelo 3 : $M[(a_{03} < 0, b_{03} < 0)]$

modelo 4 : $M[(a_{04} < 0, b_{04} > 0)]$.

Façamos

$$a_{02} = a_{01}, b_{02} = -b_{01}$$

$$a_{03} = -a_{01}, b_{03} = -b_{01}$$

$$a_{04} = -a_{01}, b_{04} = b_{01}$$

$$a_{03} = -a_{02}, b_{03} = b_{02}$$

$$a_{04} = -a_{02}, b_{04} = -b_{02}$$

$$a_{04} = a_{03}, b_{04} = -b_{03}.$$

Usemos a notação $z_{j,k}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4$, para denotar a j -ésima raiz do modelo k .

Existem $\binom{4}{2} = 6$ relações. Temos, $\forall c \in \mathbb{R}$,

$$z_{1,2}(c) = -z_{2,1}(c) \quad \text{e} \quad z_{2,2}(c) = -z_{1,1}(c) \quad (\text{Relação entre o modelo 1 e o modelo 2})$$

$$z_{1,3}(c) = z_{2,1}(-c) \quad \text{e} \quad z_{2,3}(c) = z_{1,1}(-c) \quad (\text{Relação entre o modelo 1 e o modelo 3})$$

$$z_{1,4}(c) = -z_{1,1}(-c) \quad \text{e} \quad z_{2,4}(c) = -z_{2,1}(-c) \quad (\text{Relação entre o modelo 1 e o modelo 4})$$

$$z_{1,3}(c) = -z_{1,2}(-c) \quad \text{e} \quad z_{2,3}(c) = -z_{2,2}(-c) \quad (\text{Relação entre o modelo 2 e o modelo 3})$$

$$z_{1,4}(c) = z_{2,2}(-c) \quad \text{e} \quad z_{2,4}(c) = z_{1,2}(-c) \quad (\text{Relação entre o modelo 2 e o modelo 4})$$

$$z_{1,4}(c) = -z_{2,3}(c) \quad \text{e} \quad z_{2,4}(c) = -z_{1,3}(c) \quad (\text{Relação entre o modelo 3 e o modelo 4}).$$

c2) Estilo 2

Definamos

modelo 5 : $M[(a_{05} > 0, b_{05} = 0)]$

modelo 6 : $M[(a_{06} < 0, b_{06} = 0)]$.

Façamos

$$a_{06} = -a_{05}, b_{06} = b_{05} = 0.$$

Usemos a notação $z_{j,k}$, $j = 1, 2$, $k = 5, 6$, para denotar a j -ésima raiz do modelo k .

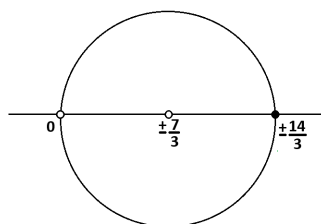
Existe $\binom{2}{2} = 1$ relação. Temos, $\forall c \in \mathbb{R}$,

$$z_{1,6}(c) = z_{2,5}(-c) = -z_{1,5}(-c) \quad \text{e} \quad z_{2,6}(c) = z_{1,5}(-c) = -z_{2,5}(-c).$$

6.2 Exemplos

1) Molde sobre o qual repousam as raízes de $f_a(z) = az^2 \pm 3z \pm 7$, $a \in \mathbb{R}^*$.

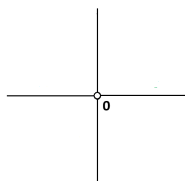
Figura 30: $\text{MOL}[(b_0 = +3, c_0 = +7), (b_0 = -3, c_0 = +7), (b_0 = +3, c_0 = -7), (b_0 = -3, c_0 = -7)]$. Temos $\frac{7}{3}$ e $\frac{14}{3}$ quando $(b_0 = -3, c_0 = +7)$ ou $(b_0 = +3, c_0 = -7)$; e temos $-\frac{7}{3}$ e $-\frac{14}{3}$ quando $(b_0 = +3, c_0 = +7)$ ou $(b_0 = -3, c_0 = -7)$.



Fonte: elaborada pelo autor

2) Molde sobre o qual repousam as raízes de $f_a(z) = az^2 \pm 7$, $a \in \mathbb{R}^*$.

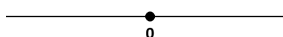
Figura 31: $\text{MOL}[(b_0 = 0, c_0 = 7), (b_0 = 0, c_0 = -7)]$



Fonte: elaborada pelo autor

3) Molde sobre o qual repousam as raízes de $f_a(z) = az^2 \pm 3z$, $a \in \mathbb{R}^*$.

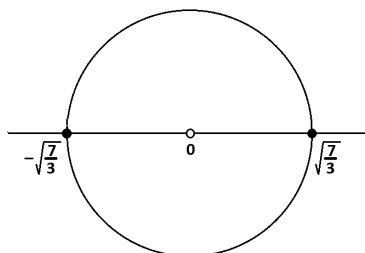
Figura 32: $\text{MOL}[(b_0 = +3, c_0 = 0), (b_0 = -3, c_0 = 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

4) Molde sobre o qual repousam as raízes de $f_b(z) = +3z^2 + bz + 7$ ou de $f_b(z) = -3z^2 + bz - 7$, $b \in \mathbb{R}$.

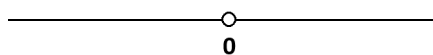
Figura 33: $\text{MOL}[(a_0 = +3, c_0 = +7), (a_0 = -3, c_0 = -7)]$



Fonte: elaborada pelo autor

5) Molde sobre o qual repousam as raízes de $f_b(z) = +3z^2 + bz - 7$ ou de $f_b(z) = -3z^2 + bz + 7$, $b \in \mathbb{R}$.

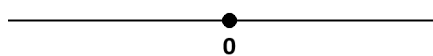
Figura 34: MOL $[(a_0 = +3, c_0 = -7), (a_0 = -3, c_0 = +7)]$



Fonte: elaborada pelo autor

6) Molde sobre o qual repousam as raízes de $f_b(z) = \pm 3z^2 + bz$, $b \in \mathbb{R}$.

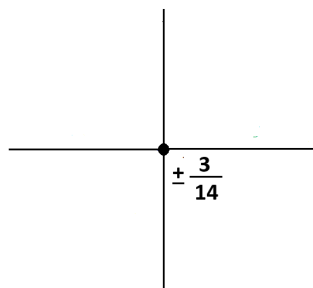
Figura 35: MOL $[(a_0 = +3, c_0 = 0), (a_0 = -3, c_0 = 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

7) Molde sobre o qual repousam as raízes de $f_c(z) = \pm 7z^2 \pm 3z + c$, $c \in \mathbb{R}$.

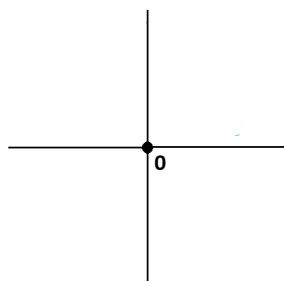
Figura 36: MOL $[(a_0 = +7, b_0 = +3), (a_0 = +7, b_0 = -3), (a_0 = -7, b_0 = -3), (a_0 = -7, b_0 = +3)]$. Temos $+\frac{3}{14}$ quando $(a_0 = +7, b_0 = -3)$ ou $(a_0 = -7, b_0 = +3)$, e temos $-\frac{3}{14}$ quando $(a_0 = +7, b_0 = +3)$ ou $(a_0 = -7, b_0 = -3)$.



Fonte: elaborada pelo autor

8) Molde sobre o qual repousam as raízes de $f_c(z) = \pm 7z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Figura 37: MOL $[(a_0 = +7, b_0 = 0), (a_0 = -7, b_0 = 0)]$



Fonte: elaborada pelo autor

6.3 Componentes conexas

Aqui provaremos que as componentes conexas de um molde são abertas e fechadas no molde. Antes, vamos recordar:

Lema 6.1 “Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, existe um aberto $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = X \cap B$ ” (Lima, 2000, p. 36).

Teorema 6.1 (Lima, 2000, p. 36) Vale para os abertos em X :

1. \emptyset e X são abertos em X .
2. Uma interseção finita e uma reunião qualquer de abertos em X é um conjunto aberto em X .

Lema 6.2 “Se $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ são abertos então o produto cartesiano $A \times B \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é aberto” (Lima, 2000, p. 37).

Teorema 6.2 “Seja $F \subset X$. A fim de que F seja fechado em X é necessário e suficiente que o conjunto $X - F$ (complementar de F relativamente a X) seja aberto em X ” (Lima, 2000, p. 41).

Lema 6.3 “Se $F \subset \mathbb{R}^m$ e $G \subset \mathbb{R}^n$ são fechados então o produto cartesiano $F \times G \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é fechado” (Lima, 2000, p. 42).

a) Primeiro caso

Vimos que, supondo o eixo x orientado para a esquerda e o eixo y para cima, o molde 1 é a reunião disjunta $m_1 \doteq C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde $C_1 \doteq]0, +\infty[\times \{0\}$, $C_2 \doteq \left] -\frac{c_0}{b_0}, 0 \right[\times \{0\}$ e $C_3 \doteq \left(\left[-\frac{2c_0}{b_0}, -\frac{c_0}{b_0} \right[\times \{0\} \right) \cup \left(\left[-\infty, -\frac{2c_0}{b_0} \right] \times \{0\} \right) \cup f \left(\left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0 \right] \right) \cup f_1 \left(\left[-\frac{2c_0}{b_0}, 0 \right] \right)$.

Seja $\epsilon > 0$. Pelo Lema 6.2, $]0, +\infty[- \epsilon, +\epsilon[$ é aberto em \mathbb{R}^2 . Temos $C_1 = m_1 \cap (]0, +\infty[\times] - \epsilon, +\epsilon[)$. Pelo Lema 6.1, $C_1 \subset m_1$ é aberto em m_1 . Agora, tomamos a bola aberta $B \left(-\frac{c_0}{2b_0}; \frac{c_0}{2b_0} \right) \subset \mathbb{R}^2$.

Temos $C_2 = m_1 \cap B \left(-\frac{c_0}{2b_0}; \frac{c_0}{2b_0} \right)$. Pelo Lema 6.1, $C_2 \subset m_1$ é aberto em m_1 . Sabemos que $[-c_0/b_0, +\infty[$ é fechado em \mathbb{R} e $\{0\} \subset \mathbb{R}$ é fechado em \mathbb{R} . Pelo Lema 6.3, $[-c_0/b_0, +\infty[\times \{0\}$ é fechado em \mathbb{R}^2 e, pelo Teorema 6.2, $\mathbb{R}^2 - ([-c_0/b_0, +\infty[\times \{0\})$ é aberto em \mathbb{R}^2 . Daí temos $C_3 = m_1 \cap (\mathbb{R}^2 - ([-c_0/b_0, +\infty[\times \{0\}))$ e, pelo Lema 6.1, $C_3 \subset m_1$ é aberto em m_1 .

Sejam $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq k \neq l$. Afirmação: C_j é fechado em m_1 .

De fato, seja $\bigcup_{m_1} C_j = \{(x, y) \in m_1 | (x, y) \notin C_j\} = C_k \cup C_l$. Como $C_k \subset m_1$ e $C_l \subset m_1$ são abertos em m_1 , por 2. do Teorema 6.1 $\bigcup_{m_1} C_j$ é aberto em m_1 . Pelo Teorema 6.2, C_j é fechado em m_1 .

Vimos que o molde 2 ($m_2 \doteq C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$) é a reunião disjunta das componentes conexas $C_1 \doteq] - \infty, 0[\times \{0\}$, $C_2 \doteq]0, +\infty[\times \{0\}$, $C_3 \doteq \{0\} \times] - \infty, 0[$ e $C_4 \doteq \{0\} \times]0, +\infty[$.

Seja $\epsilon > 0$. Pelo Lema 6.2, $] - \infty, 0[- \epsilon, +\epsilon[$, $]0, +\infty[- \epsilon, +\epsilon[$, $] - \epsilon, +\epsilon[\times] - \infty, 0[$ e $] - \epsilon, +\epsilon[\times]0, +\infty[$ são abertos em \mathbb{R}^2 . Pelo Lema 6.1, $C_1 = m_2 \cap (] - \infty, 0[\times] - \epsilon, +\epsilon[) \subset m_2$, $C_2 = m_2 \cap (]0, +\infty[\times] - \epsilon, +\epsilon[) \subset m_2$, $C_3 = m_2 \cap (] - \epsilon, +\epsilon[\times] - \infty, 0[) \subset m_2$ e $C_4 = m_2 \cap (] - \epsilon, +\epsilon[\times]0, +\infty[) \subset m_2$ são abertos em m_2 .

Sejam $j, k, l, n \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \neq k \neq l \neq n$. Afirmação: C_j é fechado em m_2 .

De fato, seja $\mathbb{C}_{m_2}C_j = \{(x, y) \in m_2 | (x, y) \notin C_j\} = C_k \cup C_l \cup C_n$. Como $C_k \subset m_2$, $C_l \subset m_2$ e $C_n \subset m_2$ são abertos em m_2 , por 2. do Teorema 6.1 $\mathbb{C}_{m_2}C_j$ é aberto em m_2 . Pelo Teorema 6.2, C_j é *fechado* em m_2 .

Vimos que o molde 3 é $m_3 \doteq \mathbb{R}$. Por 1. do Teorema 6.1, m_3 é *aberto* em m_3 . De novo por 1. do Teorema 6.1, vem que $\mathbb{C}_{m_3}m_3 = \emptyset$ é aberto em m_3 . Daí, pelo Teorema 6.2, m_3 é *fechado* em m_3 .

Vimos que o molde 4 é $m_4 \doteq \{0\}$. Por 1. do Teorema 6.1, m_4 é *aberto* em m_4 . De novo por 1. do Teorema 6.1, vem que $\mathbb{C}_{m_4}m_4 = \emptyset$ é aberto em m_4 . Daí, pelo Teorema 6.2, m_4 é *fechado* em m_4 .

b) Segundo caso

Vimos que, com o eixo x orientado para a direita e o eixo y para cima, o molde 1 é a componente conexa $m_1 \doteq (]0, \sqrt{c_0/a_0}] \times \{0\}) \cup ([\sqrt{c_0/a_0}, +\infty[\times \{0\}) \cup (]-\infty, -\sqrt{c_0/a_0}] \times \{0\}) \cup ([-\sqrt{c_0/a_0}, 0[\times \{0\}) \cup f([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}]) \cup f_1([-\sqrt{c_0/a_0}, \sqrt{c_0/a_0}])$.

Por 1. do Teorema 6.1, m_1 é *aberto* em m_1 . De novo por 1. do Teorema 6.1, vem que $\mathbb{C}_{m_1}m_1 = \emptyset$ é aberto em m_1 . Daí, pelo Teorema 6.2, m_1 é *fechado* em m_1 .

Vimos que o molde 2 é a reunião disjunta $m_2 \doteq]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. $]-\infty, 0[$ é um aberto em \mathbb{R} e temos $]-\infty, 0[= m_2 \cap]-\infty, 0[$. Daí, pelo Lema 6.1, $]-\infty, 0[\subset m_2$ é *aberto* em m_2 . Por outro lado, $\mathbb{C}_{m_2}]-\infty, 0[=]0, +\infty[$ é um aberto em \mathbb{R} , e temos $]0, +\infty[= m_2 \cap]0, +\infty[$. Daí, pelo Lema 6.1, $]0, +\infty[\subset m_2$ é *aberto* em m_2 . Logo, pelo Teorema 6.2, $]-\infty, 0[$ é *fechado* em m_2 . Como $\mathbb{C}_{m_2}]0, +\infty[=]-\infty, 0[$ é aberto em m_2 , segue pelo Teorema 6.2 que $]0, +\infty[$ é *fechado* em m_2 .

Vimos que o molde 3 é $m_3 \doteq]-\infty, 0] \cup [0, +\infty[= \mathbb{R}$. Portanto, a justificativa é a mesma da dada para o molde 3 do Primeiro caso.

c) Terceiro caso

Vimos que o molde 1 é a componente conexa $m_1 \doteq C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, onde $C_1 \doteq]-\infty, -b_0/2a_0] \times \{0\}$, $C_2 \doteq [-b_0/2a_0, +\infty[\times \{0\}$, $C_3 \doteq \{-b_0/2a_0\} \times]-\infty, 0]$ e $C_4 \doteq \{-b_0/2a_0\} \times [0, +\infty[$.

Por 1. do Teorema 6.1, m_1 é *aberto* em m_1 . De novo por 1. do Teorema 6.1, vem que $\mathbb{C}_{m_1}m_1 = \emptyset$ é aberto em m_1 . Daí, pelo Teorema 6.2, m_1 é *fechado* em m_1 .

Vimos que o molde 2 é a componente conexa $m_2 \doteq C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, onde $C_1 \doteq]-\infty, 0] \times \{0\}$, $C_2 \doteq [0, +\infty[\times \{0\}$, $C_3 \doteq \{0\} \times]-\infty, 0]$ e $C_4 \doteq \{0\} \times [0, +\infty[$. A justificativa é a mesma da dada para o molde 1.

6.4 Continuidade e diferenciabilidade

a) Continuidade

a1) Primeiro caso

- $M[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$

A primeira raiz é a função $z_1 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$z_1(a) = \begin{cases} \left(\left(-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4ac_0} \right) / 2a, 0 \right) & \text{para } a < 0 \text{ ou } 0 < a < b_0^2/4c_0 \\ (-2c_0/b_0, 0) & \text{para } a = b_0^2/4c_0 \\ \left(-b_0/2a, \sqrt{4ac_0 - b_0^2}/2a \right) & \text{para } a > b_0^2/4c_0. \end{cases} \quad (3)$$

Sabemos do curso de Cálculo de uma variável real a valores em \mathbb{R} que as funções $-b_0$, $b_0^2 - 4ac_0$, $\sqrt{b_0^2 - 4ac_0}$, $-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}$, $2a$, $\left(-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}\right) / 2a$ e a constante 0 são contínuas para $a < 0$ ou $0 < a < b_0^2/4c_0$. Pelo Corolário 2.1,

$$z_1 \text{ é contínua para } a < 0 \text{ ou } 0 < a < b_0^2/4c_0. \quad (4)$$

Temos

$$\lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}^-} z_1(a) = \lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}^-} \left(\left(-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4ac_0} \right) / 2a, 0 \right) = (-2c_0/b_0, 0) = z_1(b_0^2/4c_0) \quad (5)$$

$$\text{e } \lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}^+} z_1(a) = \lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}^+} \left(-b_0 / 2a, \sqrt{4ac_0 - b_0^2} / 2a \right) = (-2c_0/b_0, 0) = z_1(b_0^2/4c_0). \quad (6)$$

Ou seja,

$$\lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}} z_1(a) = z_1(b_0^2/4c_0), \text{ isto é, } z_1 \text{ é contínua para } a = b_0^2/4c_0. \quad (7)$$

Novamente do curso de Cálculo de uma variável real a valores em \mathbb{R} , sabemos que as funções $-b_0 / 2a$ e $\sqrt{4ac_0 - b_0^2} / 2a$ são contínuas para $a > b_0^2/4c_0$. Pelo Corolário 2.1,

$$z_1 \text{ é contínua para } a > b_0^2/4c_0. \quad (8)$$

De (4), (7) e (8) segue que z_1 é contínua em \mathbb{R}^* .

A prova da continuidade de z_2 em \mathbb{R}^* é similar à de z_1 .

- São também contínuas as $z_j : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$, nos modelos $M[(b_0 < 0, c_0 > 0)]$, $M[(b_0 > 0, c_0 < 0)]$, $M[(b_0 < 0, c_0 < 0)]$, $M[(b_0 = 0, c_0 > 0)]$, $M[(b_0 = 0, c_0 < 0)]$, $M[(b_0 > 0, c_0 = 0)]$, $M[(b_0 < 0, c_0 = 0)]$ e $M[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$.

a2) Segundo caso

- $M[(a_0 > 0, c_0 > 0)]$

A primeira raiz é a função $z_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$z_1(b) = \begin{cases} \left(\left(-b + \sqrt{b^2 - 4a_0c_0} \right) / 2a_0, 0 \right) & \text{para } b < -2\sqrt{a_0c_0} \text{ ou } b > 2\sqrt{a_0c_0} \\ \left(\sqrt{c_0/a_0}, 0 \right) & \text{para } b = -2\sqrt{a_0c_0} \\ \left(-\sqrt{c_0/a_0}, 0 \right) & \text{para } b = 2\sqrt{a_0c_0} \\ \left(-b / 2a_0, \sqrt{4a_0c_0 - b^2} / 2a_0 \right) & \text{para } -2\sqrt{a_0c_0} < b < 2\sqrt{a_0c_0}. \end{cases} \quad (9)$$

$\left(-b + \sqrt{b^2 - 4a_0c_0} \right) / 2a_0$ e 0 são contínuas para $b < -2\sqrt{a_0c_0}$. Pelo Corolário 2.1,

$$z_1 \text{ é contínua para } b < -2\sqrt{a_0c_0}. \quad (10)$$

Temos

$$\lim_{b \rightarrow -2\sqrt{a_0 c_0}^-} \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a_0 c_0}}{2a_0}, 0 \right) = \left(\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}, 0 \right) = \lim_{b \rightarrow -2\sqrt{a_0 c_0}^+} \left(-\frac{b}{2a_0}, \frac{\sqrt{4a_0 c_0 - b^2}}{2a_0} \right). \quad (11)$$

Isto é, $\lim_{b \rightarrow -2\sqrt{a_0 c_0}} z_1(b) = z_1(-2\sqrt{a_0 c_0})$, ou seja, z_1 é contínua para $b = -2\sqrt{a_0 c_0}$. (12)

$-b/2a_0$ e $\sqrt{4a_0 c_0 - b^2}/2a_0$ são contínuas para $-2\sqrt{a_0 c_0} < b < 2\sqrt{a_0 c_0}$. Pelo Corolário 2.1,

$$z_1 \text{ é contínua para } -2\sqrt{a_0 c_0} < b < 2\sqrt{a_0 c_0}. \quad (13)$$

Também temos

$$\lim_{b \rightarrow 2\sqrt{a_0 c_0}^+} \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a_0 c_0}}{2a_0}, 0 \right) = \left(-\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}, 0 \right) = \lim_{b \rightarrow 2\sqrt{a_0 c_0}^-} \left(-\frac{b}{2a_0}, \frac{\sqrt{4a_0 c_0 - b^2}}{2a_0} \right). \quad (14)$$

Isto é, $\lim_{b \rightarrow 2\sqrt{a_0 c_0}} z_1(b) = z_1(2\sqrt{a_0 c_0})$, ou seja, z_1 é contínua para $b = 2\sqrt{a_0 c_0}$. (15)

Analogamente ao que foi feito para $b < -2\sqrt{a_0 c_0}$ decorre que

$$z_1 \text{ é contínua para } b > 2\sqrt{a_0 c_0}. \quad (16)$$

De (10) a (16) segue que z_1 é contínua em \mathbb{R} .

A prova da continuidade de z_2 em \mathbb{R} é similar à de z_1 .

- São também contínuas as $z_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$, nos modelos $M[(a_0 < 0, c_0 < 0)]$, $M[(a_0 > 0, c_0 < 0)]$, $M[(a_0 < 0, c_0 > 0)]$, $M[(a_0 > 0, c_0 = 0)]$ e $M[(a_0 < 0, c_0 = 0)]$.

a3) Terceiro caso

- $M[(a_0 > 0, b_0 > 0)]$

A primeira raiz é a função $z_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$z_1(c) = \begin{cases} \left(\frac{(-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0 c})}{2a_0}, 0 \right) & \text{para } c < b_0^2/4a_0 \\ (-b_0/2a_0, 0) & \text{para } c = b_0^2/4a_0 \\ \left(-b_0/2a_0, \frac{\sqrt{4a_0 c - b_0^2}}{2a_0} \right) & \text{para } c > b_0^2/4a_0. \end{cases} \quad (17)$$

$(-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0 c})/2a_0$ e 0 são contínuas para $c < b_0^2/4a_0$. Pelo Corolário 2.1,

$$z_1 \text{ é contínua para } c < b_0^2/4a_0. \quad (18)$$

Temos

$$\lim_{c \rightarrow \frac{b_0^2}{4a_0}^-} \left(\frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4a_0 c}}{2a_0}, 0 \right) = \left(-\frac{b_0}{2a_0}, 0 \right) = \lim_{c \rightarrow \frac{b_0^2}{4a_0}^+} \left(-\frac{b_0}{2a_0}, \frac{\sqrt{4a_0 c - b_0^2}}{2a_0} \right). \quad (19)$$

Isto é, $\lim_{c \rightarrow \frac{b_0^2}{4a_0}} z_1(c) = z_1(b_0^2/4a_0)$, ou seja, z_1 é contínua para $c = b_0^2/4a_0$. (20)

$-b_0/2a_0$ e $\sqrt{4a_0c - b_0^2}/2a_0$ são contínuas para $c > b_0^2/4a_0$. Pelo Corolário 2.1,
 z_1 é contínua para $c > b_0^2/4a_0$. (21)

De (18), (20) e (21) segue que z_1 é contínua em \mathbb{R} .

A prova da continuidade de z_2 em \mathbb{R} é similar à de z_1 .

- São também contínuas as $z_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $j = 1, 2$, nos modelos $M[(a_0 > 0, b_0 < 0)]$, $M[(a_0 < 0, b_0 < 0)]$, $M[(a_0 < 0, b_0 > 0)]$, $M[(a_0 > 0, b_0 = 0)]$ e $M[(a_0 < 0, b_0 = 0)]$.

Há um resultado que diz que as raízes de um polinômio dependem continuamente dos seus coeficientes. Mais precisamente tem-se o

Teorema 6.3 *Sejam $p(z) = a_0z^m + a_1z^{m-1} + \dots + a_m$ um polinômio complexo, $a \in \mathbb{C}$ uma raiz de p com multiplicidade k e D um disco de centro a e raio ϵ , não contendo outra raiz de p . Existe $\delta > 0$ tal que se $q(z) = b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m$ é qualquer polinômio satisfazendo $|b_0 - a_0| < \delta, \dots, |b_m - a_m| < \delta$ então q possui k raízes no disco D (cada uma delas sendo contada de acordo com sua multiplicidade). (Lima, 2000, p. 232)*

b) Diferenciabilidade

Toda raiz simples de um polinômio é uma função infinitamente diferenciável (classe C^∞) dos coeficientes desse polinômio. Mais precisamente tem-se o

Teorema 6.4 *Para cada $a = (a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1} = \mathbb{R}^{2m+2}$, indique com p_a o polinômio complexo $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m$. Se z_0 é uma raiz simples do polinômio p_a , existem bolas abertas $B = B(a, \epsilon)$ em \mathbb{C}^{m+1} e $D = D(z_0, \delta)$ em \mathbb{C} tais que, para todo $b \in B$, o polinômio p_b tem uma única raiz $z = z(b)$ em D , a qual é simples, e a aplicação $B \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $b \mapsto z(b)$, é de classe C^∞ . (Lima, 2000, p. 343)*

Falando por alto, em particular as raízes simples de $f(z) = c + bz + az^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, são funções C^∞ dos seus coeficientes; em particular o são se fixados dois dos três coeficientes reais.

Não obstante, com exceção da raiz dupla $z_1 = z_2 = 0 \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ no modelo $M[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$, as raízes duplas nos modelos $M[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$, $M[(b_0 < 0, c_0 > 0)]$, $M[(b_0 > 0, c_0 < 0)]$, $M[(b_0 < 0, c_0 < 0)]$, $M[(a_0 > 0, c_0 > 0)]$, $M[(a_0 < 0, c_0 < 0)]$, $M[(a_0 > 0, c_0 = 0)]$, $M[(a_0 < 0, c_0 = 0)]$, $M[(a_0 > 0, b_0 > 0)]$, $M[(a_0 > 0, b_0 < 0)]$, $M[(a_0 < 0, b_0 < 0)]$, $M[(a_0 < 0, b_0 > 0)]$, $M[(a_0 > 0, b_0 = 0)]$ e $M[(a_0 < 0, b_0 = 0)]$ não são diferenciáveis.

Provemos que a raiz dupla no modelo $M[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$ não é diferenciável em $a = b_0^2/4c_0$. De (3) temos

$$\frac{z_1(a) - z_1(b_0^2/4c_0)}{a - b_0^2/4c_0} = \left(\frac{4c_0}{4c_0a - b_0^2} \left[\frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}}{2a} + \frac{2c_0}{b_0} \right], \underbrace{0}_{A(a)} \right) \quad \text{para } 0 < a < b_0^2/4c_0 \quad (22)$$

$$e \frac{z_1(a) - z_1(b_0^2/4c_0)}{a - b_0^2/4c_0} = \left(\frac{4c_0}{4c_0a - b_0^2} \left[\frac{-b_0}{2a} + \frac{2c_0}{b_0} \right], \underbrace{\frac{2c_0}{a\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}}_{B(a)} \right) \quad \text{para } a > b_0^2/4c_0. \quad (23)$$

Assim,

$$\lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}^-} A(a) = 0 \quad e \quad \lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}^+} B(a) = \lim_{a \rightarrow \frac{b_0^2}{4c_0}^+} \frac{2c_0}{a\sqrt{4ac_0 - b_0^2}} = +\infty. \quad (24)$$

Daí, a componente y de z_1 não é diferenciável em $a = b_0^2/4c_0$, logo z_1 não é diferenciável em $a = b_0^2/4c_0$. Analogamente, z_2 não é diferenciável em $a = b_0^2/4c_0$. Portanto, a raiz dupla não é diferenciável em $a = b_0^2/4c_0$.

Provemos que a raiz dupla no modelo $M[(a_0 > 0, c_0 > 0)]$ não é diferenciável em $b = 2\sqrt{a_0c_0}$. De (9) temos

$$\frac{(z_1)_y(b) - (z_1)_y(2\sqrt{a_0c_0})}{b - 2\sqrt{a_0c_0}} = -\frac{1}{2a_0} \frac{\sqrt{2\sqrt{a_0c_0} + b}}{\sqrt{2\sqrt{a_0c_0} - b}} \quad \text{para } -2\sqrt{a_0c_0} < b < 2\sqrt{a_0c_0}. \quad (25)$$

Assim,

$$\lim_{b \rightarrow 2\sqrt{a_0c_0}^-} -\frac{1}{2a_0} \frac{\sqrt{2\sqrt{a_0c_0} + b}}{\sqrt{2\sqrt{a_0c_0} - b}} = -\infty \quad (26)$$

e a componente y de z_1 não é diferenciável em $b = 2\sqrt{a_0c_0}$. Logo, z_1 não é diferenciável em $b = 2\sqrt{a_0c_0}$. Analogamente, a componente y de z_2 não é diferenciável em $b = 2\sqrt{a_0c_0}$. Daí z_2 não é diferenciável em $b = 2\sqrt{a_0c_0}$. Portanto, a raiz dupla não é diferenciável em $b = 2\sqrt{a_0c_0}$. De maneira similar, prova-se que a raiz dupla não é diferenciável em $b = -2\sqrt{a_0c_0}$.

Provemos que a raiz dupla no modelo $M[(a_0 > 0, b_0 > 0)]$ não é diferenciável em $c = b_0^2/4a_0$. De (17) temos

$$\frac{(z_1)_y(c) - (z_1)_y(b_0^2/4a_0)}{c - b_0^2/4a_0} = \frac{2}{\sqrt{4a_0c - b_0^2}} \quad \text{para } c > b_0^2/4a_0. \quad (27)$$

Assim,

$$\lim_{c \rightarrow \frac{b_0^2}{4a_0}^+} \frac{2}{\sqrt{4a_0c - b_0^2}} = +\infty \quad (28)$$

e a componente y de z_1 não é diferenciável em $c = b_0^2/4a_0$. Logo, z_1 não é diferenciável em $c = b_0^2/4a_0$. Analogamente, a componente y de z_2 não é diferenciável em $c = b_0^2/4a_0$. Daí z_2 não é diferenciável em $c = b_0^2/4a_0$. Portanto, a raiz dupla não é diferenciável em $c = b_0^2/4a_0$.

Provemos que a raiz dupla no modelo $M[(a_0 > 0, c_0 = 0)]$ não é diferenciável em $b = 0$.

A primeira raiz é a função $z_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$z_1(b) = \begin{cases} (-b/a_0, 0) & \text{para } b < 0 \\ (0, 0) & \text{para } b = 0 \\ (0, 0) & \text{para } b > 0. \end{cases} \text{ Temos} \quad (29)$$

$$\frac{(z_1)_x(b) - (z_1)_x(0)}{b - 0} = \begin{cases} -1/a_0 & \text{para } b < 0 \\ 0 & \text{para } b > 0. \end{cases} \text{ Assim,} \quad (30)$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^-} \frac{(z_1)_x(b) - (z_1)_x(0)}{b - 0} = -1/a_0 \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{(z_1)_x(b) - (z_1)_x(0)}{b - 0} = 0, \quad (31)$$

e a componente x de z_1 não é diferenciável em $b = 0$. Logo, z_1 não é diferenciável em $b = 0$. Analogamente, a componente x de z_2 não é diferenciável em $b = 0$. Daí z_2 não é diferenciável em $b = 0$. Portanto, a raiz dupla não é diferenciável em $b = 0$.

Provemos que a raiz dupla no modelo $M[(a_0 > 0, b_0 = 0)]$ não é diferenciável em $c = 0$.

A primeira raiz é a função $z_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$z_1(c) = \begin{cases} (\sqrt{-c/a_0}, 0) & \text{para } c < 0 \\ (0, 0) & \text{para } c = 0 \\ (0, \sqrt{c/a_0}) & \text{para } c > 0. \end{cases} \text{ Temos} \quad (32)$$

$$\frac{(z_1)_y(c) - (z_1)_y(0)}{c - 0} = \begin{cases} 0 & \text{para } c < 0 \\ \sqrt{\frac{1}{a_0 c}} & \text{para } c > 0. \end{cases} \text{ Assim,} \quad (33)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^-} \frac{(z_1)_y(c) - (z_1)_y(0)}{c - 0} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{(z_1)_y(c) - (z_1)_y(0)}{c - 0} = +\infty, \quad (34)$$

e a componente y de z_1 não é diferenciável em $c = 0$. Logo, z_1 não é diferenciável em $c = 0$. Analogamente, a componente y de z_2 não é diferenciável em $c = 0$. Daí z_2 não é diferenciável em $c = 0$. Portanto, a raiz dupla não é diferenciável em $c = 0$.

6.5 Um pouco mais de explanação

Dado que Yamaoka (2023) e este artigo têm também caracteres instrucionais, é pertinente acrescentarmos a referência bibliográfica que contém a teoria que embasa o item 7. de Yamaoka (2023, p. 59), ficando assim:

“7. Em cada subcaso, seja $G_1 \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto dos pontos do caminho da 1ª raiz em \mathbb{R}^2 e $G_2 \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto dos pontos do caminho da 2ª raiz em \mathbb{R}^2 . O(s) ponto(s) aderente(s)” [Definição 2.7] “comum(ns) a G_1 e a G_2 é (são):... .Conforme visto acima..., para cada subcaso existe pelo menos um ponto P ...tal que toda bola aberta em \mathbb{R}^2 com centro P contém algum ponto de G_1 e de G_2 , ou seja, P é um ponto aderente a G_1 e a G_2 ” [“A fim de que o ponto a seja aderente ao conjunto X , é necessário e suficiente que toda bola aberta de centro a contenha algum ponto de X ”(Lima, 2000, p. 38).] “ou seja, $P \in \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2$, onde \bar{G}_j denota o conjunto dos pontos aderentes a G_j , $j = 1, 2$ ” [Definição 2.8] “o que implica que a distância entre G_1 e G_2 ” (Lima, 2000, p. 49) “é $d(G_1, G_2) = d(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$ ” (Lima, 2000, p. 50) “= 0”.

7 Conclusões

Em cada tabela: a 1ª coluna representa o Estilo; a 2ª, o Modelo; a 3ª, o Número de componentes conexas de cada raiz por Modelo; a 4ª, o Molde; a 5ª, o Número de componentes conexas do Molde.

Tabela 1 - Primeiro caso

Estilo	Modelo	Nº c.c./raiz/Model	Molde	Nº c.c. Molde
1	. $M[(b_0 > 0, c_0 > 0)]$	1ª raiz:2 ; 2ª raiz:2	. $MOL[(b_0 > 0, c_0 > 0),$ $(b_0 < 0, c_0 > 0),$ $(b_0 > 0, c_0 < 0),$ $(b_0 < 0, c_0 < 0)]$	3
	. $M[(b_0 < 0, c_0 > 0)]$			
	. $M[(b_0 > 0, c_0 < 0)]$			
	. $M[(b_0 < 0, c_0 < 0)]$			
2	. $M[(b_0 = 0, c_0 > 0)]$	1ª raiz:2 ; 2ª raiz:2	. $MOL[(b_0 = 0, c_0 > 0),$ $(b_0 = 0, c_0 < 0)]$	4
	. $M[(b_0 = 0, c_0 < 0)]$			
3	. $M[(b_0 > 0, c_0 = 0)]$	1ª raiz:1 ; 2ª raiz:2	. $MOL[(b_0 > 0, c_0 = 0),$ $(b_0 < 0, c_0 = 0)]$	1
	. $M[(b_0 < 0, c_0 = 0)]$	1ª raiz:2 ; 2ª raiz:1		
4	. $M[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$	1ª raiz:1 ; 2ª raiz:1	. $MOL[(b_0 = 0, c_0 = 0)]$	1

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 2 - Segundo caso

Estilo	Modelo	Nº c.c./raiz/Model	Molde	Nº c.c. Molde
1	. $M[(a_0 > 0, c_0 > 0)]$	1ª raiz:1 ; 2ª raiz:1	. $MOL[(a_0 > 0, c_0 > 0),$ $(a_0 < 0, c_0 < 0)]$	1
	. $M[(a_0 < 0, c_0 < 0)]$			
2	. $M[(a_0 > 0, c_0 < 0)]$	1ª raiz:1 ; 2ª raiz:1	. $MOL[(a_0 > 0, c_0 < 0),$ $(a_0 < 0, c_0 > 0)]$	2
	. $M[(a_0 < 0, c_0 > 0)]$			
3	. $M[(a_0 > 0, c_0 = 0)]$	1ª raiz:1 ; 2ª raiz:1	. $MOL[(a_0 > 0, c_0 = 0),$ $(a_0 < 0, c_0 = 0)]$	1
	. $M[(a_0 < 0, c_0 = 0)]$			

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 3 - Terceiro caso

Estilo	Modelo	Nº c.c./raiz/Model	Molde	Nº c.c. Molde
1	. $M[(a_0 > 0, b_0 > 0)]$	1ª raiz:1 ; 2ª raiz:1	. $MOL[(a_0 > 0, b_0 > 0),$ $(a_0 > 0, b_0 < 0),$ $(a_0 < 0, b_0 < 0),$ $(a_0 < 0, b_0 > 0)]$	1
	. $M[(a_0 > 0, b_0 < 0)]$			
	. $M[(a_0 < 0, b_0 < 0)]$			
	. $M[(a_0 < 0, b_0 > 0)]$			
2	. $M[(a_0 > 0, b_0 = 0)]$	1ª raiz:1 ; 2ª raiz:1	. $MOL[(a_0 > 0, b_0 = 0),$ $(a_0 < 0, b_0 = 0)]$	1
	. $M[(a_0 < 0, b_0 = 0)]$			

Fonte: elaborada pelo autor

Exceto o Estilo 4 (da **Tabela 1** - Primeiro caso), todos os demais Estilos apresentam um número par de Modelos.

Na 3ª coluna de cada tabela, em cada Estilo a soma do número de componentes conexas da 1ª raiz é igual à soma do número de componentes conexas da 2ª raiz. Por conseguinte, tem-se:

- na **Tabela 1** - Primeiro caso, na 3ª coluna, a soma do número de componentes conexas da 1ª raiz é igual à soma do número de componentes conexas da 2ª raiz: 16;

- na **Tabela 2** - Segundo caso, na 3ª coluna, a soma do número de componentes conexas da 1ª raiz é igual à soma do número de componentes conexas da 2ª raiz: 6;
- na **Tabela 3** - Terceiro caso, na 3ª coluna, a soma do número de componentes conexas da 1ª raiz é igual à soma do número de componentes conexas da 2ª raiz: 6.

Portanto, considerando-se as 3ªs colunas das 3 tabelas conjuntamente, a soma do número de componentes conexas da 1ª raiz é igual à soma do número de componentes conexas da 2ª raiz: 28.

É importante observar que o molde que apresenta o número máximo de componentes conexas, ou seja, 4 (= 2 vezes o grau de $f = 2.2$), provém de $f(z) = az^2 + c_0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $c_0 \neq 0$.

Para $f(z) = az^2 + bz^1 + cz^0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, temos:

- Nº de Estilos do Primeiro caso = $gr(f) + gr(z^2) = 2 + 2 = 4$;
- Nº de Estilos do Segundo caso = $gr(f) + gr(z^1) = 2 + 1 = 3$;
- Nº de Estilos do Terceiro caso = $gr(f) + gr(z^0) = 2 + 0 = 2$;

onde $gr(f)$ é o grau de f e $gr(z^j)$ é o grau de z^j .

Sinteticamente:

Para $f(z) = A_2z^2 + A_1z^1 + A_0z^0$, $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2$, $A_2 \neq 0$, temos

- $NE(A_j) = gr(f) + gr(z^j)$,

onde $NE(A_2)$ é o Nº de Estilos do Primeiro caso, isto é, $NE(A_2) = 4$;

$NE(A_1)$ é o Nº de Estilos do Segundo caso, isto é, $NE(A_1) = 3$;

$NE(A_0)$ é o Nº de Estilos do Terceiro caso, isto é, $NE(A_0) = 2$.

Para $f(z) = A_1z^1 + A_0z^0$, $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1$, $A_1 \neq 0$, temos

- $NE(A_j) = gr(f) + gr(z^j)$, $j = 0, 1$, isto é, $NE(A_1) = 2$, $NE(A_0) = 1$.

Para $f(z) = A_nz^n + A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_1z^1 + A_0z^0$, $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n$, $A_n \neq 0$, temos

- $NE(A_j) = gr(f) + gr(z^j)$, $j = 0, \dots, n$; $n \geq 3$?

Isto é,

- $NE(A_n) = 2n$, $NE(A_{n-1}) = 2n - 1$, \dots , $NE(A_0) = n$; $n \geq 3$?

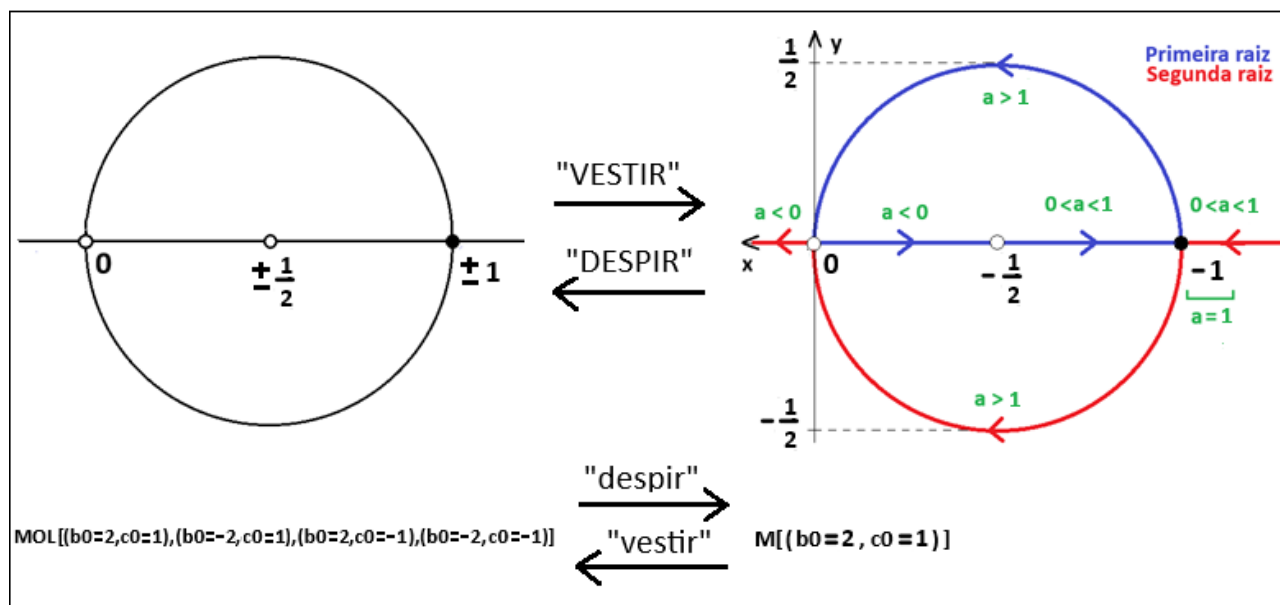
Em Yamaoka (2023) e neste artigo, os caminhos das raízes da função quadrática nos proporcionaram um passeio pela topologia do espaço euclidiano - aplicações contínuas, limites, conjuntos abertos, conjuntos fechados, distância entre dois conjuntos e conexidade - e pela diferenciabilidade de um caminho.

Em síntese, de um problema de aproximados 4 milênios cuja semente era resolver equações quadráticas, ao fixar dois coeficientes reais e variar o coeficiente real remanescente da função quadrática para determinar os caminhos das duas raízes pudemos usufruir de um bom número de conceitos e de resultados estabelecidos da Análise Clássica para atingir nossos objetivos.

Um átimo de ludicidade: A Figura 38 (*L'atelier de Mathématiques*) ilustra o ato de “VESTIR”/“despir” o Molde/notação e o de “DESPIR”/“vestir” o Modelo/notação para o Estilo 1 do Primeiro caso.

Figura 38: (*L'atelier de Mathématiques*). “VESTIR” o Molde: ornamentá-lo com os eixos x e y , com os caminhos (em azul e em vermelho; a raiz dupla $(-1, 0)$ permanece em preto) e com os intervalos do coeficiente variável (em verde); “DESPIR” o Modelo: despi-lo dos eixos x e y , dos caminhos (em azul e em vermelho; a raiz dupla $(-1, 0)$ permanece em preto) e dos intervalos do coeficiente variável (em verde); “vestir” notação: acrescentar OL, $(b_0 = -2, c_0 = 1)$, $(b_0 = 2, c_0 = -1)$ e $(b_0 = -2, c_0 = -1)$ à notação do Modelo; “despir” notação: retirar OL, $(b_0 = -2, c_0 = 1)$, $(b_0 = 2, c_0 = -1)$ e $(b_0 = -2, c_0 = -1)$ da notação do Molde. *L'atelier de Mathématiques* permite visualizar:

- (a) o nº de componentes conexas de cada raiz ($=2$) - na Figura referente ao Modelo (à direita);
- (b) o nº de componentes conexas do Molde ($=3$, cada uma aberta e fechada no molde) - na Figura referente ao Molde (à esquerda);
- (c) $d(G_1, G_2) = 0$ - na Figura referente ao Modelo (à direita): os pontos aderentes comuns a G_1 e a G_2 são $(0, 0) [\notin G_1, \notin G_2]$ e $(-1, 0) [\in G_1, \in G_2]$;
- (d) a continuidade das 2 raízes em \mathbb{R}^* - na Figura referente ao Modelo (à direita) - provada na pág.21;
- (e) a “quina” $(-1, 0)$ - na Figura referente ao Modelo (à direita) - , que acusa a não diferenciabilidade da raiz dupla em $a = 1$, provada na pág.23.

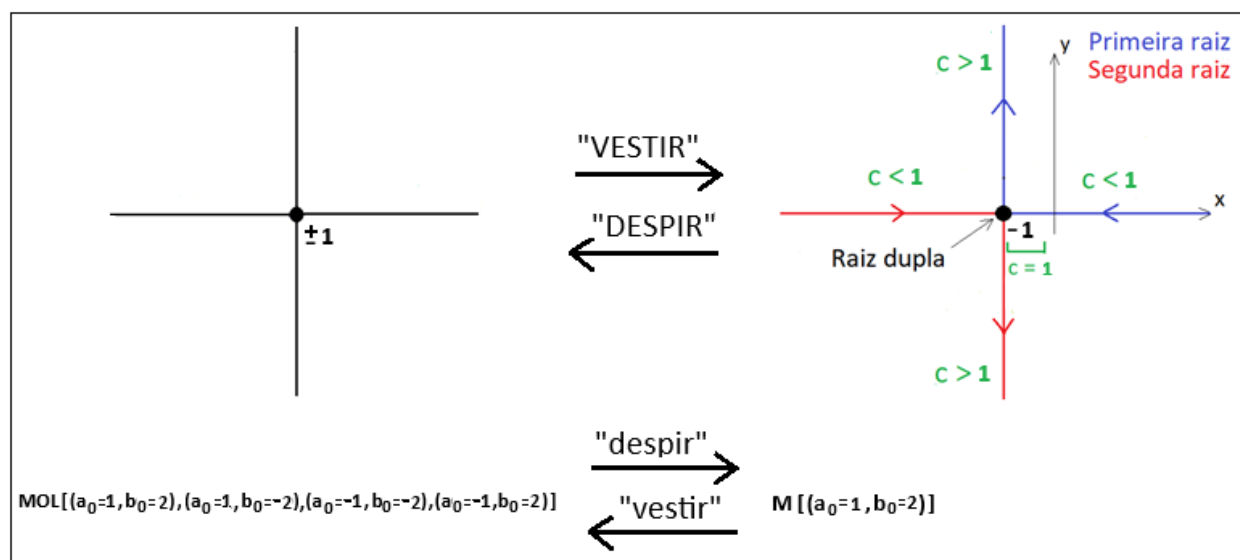


Fonte: elaborada pelo autor

Outro: A Figura 39 (*L'atelier de Mathématiques 2*) ilustra o ato de “VESTIR”/“despir” o Molde/notação e o de “DESPIR”/“vestir” o Modelo/notação para o Estilo 1 do Terceiro caso.

Figura 39: (*L'atelier de Mathématiques 2*). “VESTIR” o Molde: ornamentá-lo com os eixos x e y , com os caminhos (em azul e em vermelho; a raiz dupla $(-1, 0)$ permanece em preto) e com os intervalos do coeficiente variável (em verde); “DESPIR” o Modelo: despi-lo dos eixos x e y , dos caminhos (em azul e em vermelho; a raiz dupla $(-1, 0)$ permanece em preto) e dos intervalos do coeficiente variável (em verde); “vestir” notação: acrescentar OL, $(a_0 = 1, b_0 = -2)$, $(a_0 = -1, b_0 = -2)$ e $(a_0 = -1, b_0 = 2)$ à notação do Modelo; “despir” notação: retirar OL, $(a_0 = 1, b_0 = -2)$, $(a_0 = -1, b_0 = -2)$ e $(a_0 = -1, b_0 = 2)$ da notação do Molde. *L'atelier de Mathématiques 2* permite visualizar:

- (a) o nº de componentes conexas de cada raiz ($=1$) - na Figura referente ao Modelo (à direita);
- (b) o nº de componentes conexas do Molde ($=1$, aberta e fechada no molde) - na Figura referente ao Molde (à esquerda);
- (c) $d(G_1, G_2) = 0$ - na Figura referente ao Modelo (à direita): o ponto aderente comum a G_1 e a G_2 é $(-1, 0) [\in G_1, \in G_2]$;
- (d) a continuidade das 2 raízes em \mathbb{R} - na Figura referente ao Modelo (à direita) - provada na pág.22;
- (e) a “quina” $(-1, 0)$ - na Figura referente ao Modelo (à direita) - , que acusa a não diferenciabilidade da raiz dupla em $c = 1$, provada na pág.24.



Fonte: elaborada pelo autor

Referências

- [1] YAMAOKA, L. C. Os caminhos das raízes da função quadrática. **C.Q.D.** – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 23, n. 2, p. 36–61, dez. 2023. Disponível em: <https://revistas.bauru.unesp.br/index.php/revistacqd/article/view/402>. Acesso em: 02 jan. 2024.
- [2] LIMA, E. L. **Curso de análise**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2000. v. 2.