

Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 26, 2025
Artigo de Pesquisa

Thiago Massolini Marchesin

Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho” (Unesp),
Faculdade de Ciências (FC), Bauru,
thiago.m.marchesin@unesp.br

Rubens de Figueiredo Camargo

Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho” (Unesp),
Faculdade de Ciências (FC), Bauru

Dinâmica fracionária de uma partícula carregada sobre um campo eletromagnético

Fractional dynamics of a charged particle in an electromagnetic field

Resumo

Neste trabalho analisamos a modelagem com equações diferenciais de ordens não inteiras para fenômenos físicos, especificamente na força exercida sobre uma partícula carregada em um campo eletromagnético. A abordagem metodológica envolve a substituição das derivadas de ordem inteira pelas de ordem fracionária, no sentido de Caputo, nas equações diferenciais que descrevem o movimento de uma partícula carregada sobre um campo eletromagnético, permitindo uma descrição mais detalhada e eficiente. Os resultados demonstram que a modelagem com a derivada fracionária de Caputo proporciona uma solução mais refinada, incluindo a presença de amortecimento. Conclui-se que o uso do cálculo fracionário oferece vantagens significativas em comparação com o cálculo tradicional, destacando-se pela capacidade de capturar a memória do sistema de forma mais precisa e incorporar fatores inicialmente negligenciados na modelagem clássica.

Palavras-chave: equações diferenciais fracionárias; derivada fracionária de Caputo; cálculo fracionário e aplicações; força de Lorentz.

Abstract

In this work, we analyze the modeling of physical phenomena using fractional-order differential equations, specifically focusing on the force exerted on a charged particle in an electromagnetic field. The methodological approach involves replacing integer-order derivatives with fractional-order derivatives, in the Caputo sense, in the differential equations that describe the movement of a charged particle in an electromagnetic field. This allows for a more detailed and efficient description. The results demonstrate that modeling with the Caputo fractional derivative provides a more refined solution, including the presence of damping. It is concluded that the use of fractional calculus offers significant advantages over traditional calculus, particularly in its ability to more accurately capture the system's memory and incorporate factors initially neglected in classical modeling.

Keywords: fractional differential equations; Caputo fractional derivative; fractional calculus and applications; Lorentz force.



Introdução

No século XVII, Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz desenvolveram as técnicas do cálculo diferencial, aplicando-as com sucesso na resolução de problemas relacionados às taxas de variações. As derivadas, que representam essas taxas de variação, desempenham um papel crucial na formulação dos princípios que regem o universo físico (Stewart, 2008).

Muitos desses princípios fundamentais são expressos em termos de equações diferenciais, refletindo a taxa na qual eventos ocorrem. Assim, ao investigar a evolução de fenômenos que podem ser tratados matematicamente e cuja variação ao longo do tempo é conhecida, estamos, na verdade, buscando resolver uma equação diferencial (Boyce; Diprima, 2010,).

Modelar um sistema por meio de uma equação diferencial, *i.e.*, representar um problema considerando sua função e suas taxas de variação, é uma tarefa complexa e exigente, na qual, requer um meticuloso processo de seleção dos fatores e variáveis a serem incluídos para simplificar o modelo, visando uma representação aproximada e viável do fenômeno estudado.

Recentemente, o Cálculo de Ordem não Inteira, conhecido como Cálculo Fracionário (CF), tem ganhado espaço como uma nova abordagem para modelar fenômenos, permitindo uma descrição mais refinada e eficiente dos fenômenos em comparação com o tradicional cálculo de ordem inteira. Este ramo da matemática trata do estudo de integrais e derivadas de ordens não inteiras (Camargo; Oliveira, 2015).

Com o desenvolvimento do CF, inúmeros operadores fracionários surgiram, entre eles, o de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, Riesz (Camargo; Oliveira, 2015) e derivada fracionária conforme (Khalil; Al Horani; Yousef; Sababheh, 2014). Diante disso, é levantada a questão de se existe um critério específico que possamos seguir e analisar para determinar se um operador pode ser considerado uma derivada fracionária (Camargo; Oliveira, 2015). A busca por formalização nesse campo de pesquisa ganhou destaque após o primeiro congresso dedicado ao cálculo fracionário em 1974 (Camargo; Oliveira, 2015, Teodoro, 2019), quando Ross propôs um critério, composto por cinco itens, para auxiliar nessa formalização (Teodoro, 2019). Posteriormente, em 2015, Ortigueira e Tenreiro Machado apresentaram um novo critério, também composto por cinco itens, divergindo de Ross na abordagem da regra de Leibniz em sua versão fracionária ().

A maneira mais comum de utilizar o CF na modelagem matemática é considerar uma equação diferencial que descreve um fenômeno específico e substituir as derivadas de ordem inteira por derivadas de ordem não inteira, de modo que a ordem da derivada fracionária pertença ao intervalo $(\alpha, \beta]$, onde β é a ordem da derivada substituída e $\alpha = \beta - 1$, permitindo assim a recuperação da solução usual como um caso particular (Camargo; Oliveira, 2015). Embora não haja uma interpretação física e geométrica trivial para a derivada fracionária e a integral fracionária (Podlubny, 1999), as equações diferenciais de ordem fracionária estão naturalmente relacionadas a sistemas com memória, uma vez que as derivadas fracionárias geralmente não são operadores locais, *i.e.*, calcular a derivada fracionária temporal em um momento requer considerar todos os momentos anteriores (Camargo; Oliveira, 2015, Podlubny, 1999).

Dentre os resultados conhecidos do uso da modelagem fracionária na Física, destacam-se o oscilador harmônico fracionário (Camargo; Oliveira, 2015), as equações de difusão (Gonçalves, 2005) e a equação de Schrödinger (Vellaco Gomes; Camargo; Bruno-Alfonso, 2020), nos quais são comumente empregados os operadores de Caputo e de Riesz. Em cada contexto, os efeitos incorporados pelas derivadas fracionárias são de naturezas distintas, no oscilador harmônico, a derivada de Caputo pode introduzir comportamentos análogos ao amortecimento (Camargo; Oliveira, 2015). Na equação de difusão, os operadores fracionários descrevem processos anômalos

de transporte, associados a efeitos de memória temporal ou a saltos longos, dependendo de serem aplicados no tempo ou no espaço (Gonçalves, 2005, Metzler;Klafter, 2000). Por último, na equação de Schrödinger fracionária, o uso da derivada de Riesz modifica o termo cinético, levando a uma relação energia-momento não parabólica. Nesse cenário particular, as funções de Bloch passam a exibir cúspides em espaço real, enquanto as funções de Wannier deixam de decair exponencialmente, apresentando em vez disso caudas de lei de potência (Vellaco Gomes; Camargo; Bruno-Alfonso, 2020).

Nessa perspectiva, este trabalho busca utilizar a derivada fracionária de Caputo para modelar uma situação-problema na qual a força resultante do sistema é equivalente à força de Lorentz, *i.e.*, a força exercida sobre uma partícula carregada que se move em um campo eletromagnético, com o objetivo de compreender os efeitos do operador fracionário de Caputo sobre esse problema.

Este trabalho está dividido em três partes principais. A primeira seção aborda os conceitos preliminares, como a Função de Mittag-Leffler de 1 e 2 parâmetros, a integral fracionária de Riemann-Liouville, a derivada fracionária de Caputo e sua transformada de Laplace. A segunda parte foca na modelagem de sistemas utilizando tanto o cálculo de ordem inteira quanto o cálculo de ordem não inteira. Por fim, a última seção apresenta uma discussão detalhada sobre os resultados obtidos, destacando as diferenças e vantagens do uso do cálculo fracionário em comparação com o cálculo tradicional.

Conceitos preliminares

Nesta seção, apresentaremos conceitos que são essenciais para a compreensão da modelagem fracionária que utilizaremos ao longo deste trabalho. Inicialmente, discutiremos as funções de Mittag-Leffler, que são amplamente utilizadas em contextos envolvendo equações diferenciais fracionárias (EDF). Em seguida, abordaremos a integral fracionária de Riemann-Liouville e a derivada fracionária de Caputo, conceitos-chave para o desenvolvimento da modelagem fracionária no sentido de Caputo.

Funções de Mittag-Leffler

Apresentada pelo matemático Mittag-Leffler (1903), a função de Mittag-Leffler de um parâmetro é definida pela seguinte expressão:

$$E_{\alpha}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \forall(\alpha) \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1)$$

Quando escolhemos $\alpha = 1$, a função de Mittag-Leffler de um parâmetro reduz à função exponencial:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (2)$$

Por conta disso, a função de Mittag-Leffler de um parâmetro é conhecida como uma generalização da função exponencial. O seu segundo parâmetro, foi introduzida por Wiman (1905) e é definida pela seguinte expressão:

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (3)$$

Quando $\beta = 1$, a função reduz para a função de Mittag-Leffler de um parâmetro:

$$E_{\alpha,1}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z). \quad (4)$$

Uma propriedade interessante é a integral da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Mais precisamente, para $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se (Gorenflo; Mainardi; Rogosin, 2019):

$$\int_0^t x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{\alpha}) dx = t^{\beta} E_{\alpha,\beta+1}(\lambda t^{\alpha}). \quad (5)$$

Integral Fracionária de Riemann-Liouville:

Defini-se a Integral Fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\nu \in \mathbb{R}_+$, considerando $f(t)$ uma função integrável com $t \in \mathbb{R}_+$, como:

$$I_0^{\nu} f(t) \equiv I^{\nu} f(t) = \phi_{\nu}(t) * f(t) := \int_0^t f(x) \phi_{\nu}(t-x) dx = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t f(x) (t-x)^{\nu-1} dx. \quad (6)$$

em que $*$ é o produto de convolução de Laplace e $\phi_{\nu}(t)$ a Função de Gel'fand-Shilov (Camargo; Oliveira, 2015, Camargo, 2009):

$$\phi_{\nu}(t) = \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \quad t > 0, \nu \in \mathbb{R}_+, \quad (7)$$

na qual sua transformada de Laplace é:

$$\mathcal{L}\{\phi_{\nu}(t)\}(s) = \frac{1}{s^{\nu}}, \quad \Re(s) > 0. \quad (8)$$

Com a integral fracionária de Riemann-Liouville apresentada, podemos agora definir a derivada fracionária de Caputo.

Derivada Fracionária de Caputo

A derivada fracionária de Caputo ou derivada de Caputo, tem uma relevância histórica significativa, devido ao trabalho de Michele Caputo, que apresentou esta derivada juntamente com algumas aplicações em fenômenos de viscosidade. A derivada de Caputo baseia-se da propriedade de a derivada ser a operação inversa da integração e na lei dos expoentes, logo, definimos a derivada fracionária como a integral fracionária da derivada de ordem inteira de uma função f (Camargo; Oliveira, 2015,):

$${}_c D_t^{\beta} f(t) := I^{\nu} [D^n f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-x)^{\nu-1} \frac{d^n}{dx^n} [f(x)] dx, \quad (9)$$

na qual D^n é a derivada de ordem inteira e I^{ν} é a integral de Riemann-Liouville, conforme a expressão (6), além disso, temos que $\beta \in \mathbb{C}$ com $\Re(\beta) > 0$, n o menor inteiro maior que $\Re(\beta)$ e $\nu = n - \beta$, logo, $0 < \Re(\nu) \leq 1$ (Camargo; Oliveira, 2015,).

Transformada de Laplace

Para compreendermos por que a derivada fracionária de Caputo é mais benéfica para modelagem matemática com condições iniciais, iniciaremos demonstrando a transformada de Laplace da derivada.

$$\mathcal{L} \left\{ {}_C D_t^\beta f(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ I^{n-\beta} [D^n f(t)] \right\} = \mathcal{L} \left\{ \phi_{n-\beta}(t) * D^n f(t) \right\}. \quad (10)$$

Pela propriedade da transformada de Laplace do produto de convolução (Boyce; Diprima, 2010), temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \phi_{n-\beta}(t) * D^n f(t) \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \phi_{n-\beta}(t) \right\} \mathcal{L} \left\{ D^n f(t) \right\} \\ &= s^{(\beta-n)} \left[s^n F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(j)}(0) \right] = s^\beta F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{(j+\beta-n)} f^{(j)}(0) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\therefore \mathcal{L} \left\{ {}_C D_t^\beta f(t) \right\} = s^\beta F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{(j+\beta-n)} f^{(j)}(0). \quad (12)$$

Pela expressão (12), observamos que as condições iniciais do nosso sistema estão relacionadas à função e suas derivadas de ordem inteira nos pontos $t = 0$, facilitando assim o desenvolvimento e a solução por meio dessa metodologia. Isso contrasta, por exemplo, com a transformada de Laplace da derivada fracionária de Riemann-Liouville, na qual as condições iniciais estão relacionadas à integral fracionária de Riemann-Liouville (Camargo, 2009).

Força de Lorentz

O eletromagnetismo de Maxwell é uma teoria que se baseia no campo eletromagnético, o que significa que a descrição de um sistema eletromagnético requer o conhecimento dos campos elétrico e magnético. Quando uma partícula carregada se move em uma região do espaço onde existe um campo eletromagnético, ela experimenta uma força eletromagnética resultante, conhecida como força de Lorentz (Griffiths, 2011):

$$\mathbf{F}(t) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}), \quad (13)$$

em que q é a carga elétrica da partícula, \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{v} é a velocidade da partícula, \mathbf{B} é o campo magnético e t é o tempo. A configuração dos valores que \mathbf{B} , \mathbf{v} e \mathbf{E} podem assumir depende do problema em análise. Para este trabalho, consideraremos $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (c, v_y, v_z)$ e $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$, onde c é uma constante arbitrária. Segundo o formalismo newtoniano, a descrição da dinâmica dessa carga envolve resolver um sistema de equações diferenciais, que necessitam do conhecimento da força resultante sobre a partícula (\cdot), logo, para o caso da força de Lorentz, teremos a seguinte expressão:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} m = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}), \quad (14)$$

na qual m é massa da partícula carregada. Calculando $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ c & v_y & v_z \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Calculando o determinante:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \hat{i}(v_y \cdot 0 - v_z \cdot 0) + \hat{j}(0 \cdot c + v_z \cdot B_x) + \hat{k}(0 \cdot c - v_y \cdot B_x) = \hat{i}(0) + \hat{j}(v_z B_x) + \hat{k}(-v_y B_x) \quad (16)$$

$$\therefore \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (0, v_z B_x, -v_y B_x). \quad (17)$$

Substituindo os valores na Equação (14):

$$\frac{dv}{dt} m = q[(0, 0, E_z) + (0, v_z B_x, -v_y B_x)] = q[(0, v_z B_x, E_z - v_y B_x)] \quad (18)$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{q}{m} [(0, v_z B_x, E_z - v_y B_x)]. \quad (19)$$

Logo, as componentes da força são:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} v_z B_x \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} (E_z - v_y B_x). \end{cases} \quad (20)$$

Aplicando a transformada de Laplace no sistema para encontrar v_y e v_z :

$$\begin{cases} sV_y[s] - v_y(0) = \frac{qB_x}{m} V_z[s] \\ sV_z[s] - v_z(0) = \frac{qE_z}{ms} - \frac{qB_x}{m} V_y[s]. \end{cases} \quad (21)$$

Considerando que $\mathbf{v}(0) = (c, 0, 0)$:

$$\begin{cases} sV_y[s] = \frac{qB_x}{m} V_z[s] \\ sV_z[s] = \frac{qE_z}{ms} - \frac{qB_x}{m} V_y[s] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_y[s] = \frac{qB_x}{ms} V_z[s] \\ sV_z[s] = \frac{qE_z}{ms} - \frac{qB_x}{m} V_y[s]. \end{cases} \quad (22)$$

Substituindo v_y da primeira igualdade na segunda, vamos obter:

$$sV_z[s] = \frac{qE_z}{ms} - \left(\frac{qB_x}{m}\right)^2 \frac{V_z[s]}{s} \Rightarrow V_z[s] \left[s^2 + \left(\frac{qB_x}{m}\right)^2 \right] = \frac{qE_z}{m} \quad (23)$$

$$\Rightarrow V_z[s] = \frac{qE_z}{m} \frac{1}{s^2 + \left(\frac{qB_x}{m}\right)^2} = \frac{qE_z}{m} \frac{1}{s^2 + \left(\frac{qB_x}{m}\right)^2} \frac{\frac{qB_x}{m}}{\frac{qB_x}{m}}, \quad (24)$$

aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$v_z(t) = \frac{E_z}{B_x} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{qB_x}{m}}{s^2 + \left(\frac{qB_x}{m}\right)^2} \right\} = \frac{E_z}{B_x} \sin \left(\frac{qB_x}{m} t \right). \quad (25)$$

Realizando a integração em relação a t^1 :

$$s_z(t) = \frac{mE_z}{qB_x^2} \left[1 - \cos \left(\frac{qB_x}{m} t \right) \right]. \quad (26)$$

¹É considerado $s_z(0) = 0$.

Para encontrar a componente v_y , será substituído v_z na segunda igualdade da expressão (22):

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{qE_z}{m} \sin\left(\frac{qB_x}{m}t\right) \Rightarrow \int \frac{dv_y}{dt} dt = \int \frac{qE_z}{m} \sin\left(\frac{qB_x}{m}t\right) dt \quad (27)$$

$$\therefore v_y(t) = -\frac{E_z}{B_x} \cos\left(\frac{qB_x}{m}t\right) + k, \quad (28)$$

como $v_y(0) = 0$:

$$v_y(0) = 0 = -\frac{E_z}{B_x} \cos\left(\frac{qB_x}{m}0\right) + k \Rightarrow k = \frac{E_z}{B_x} \quad (29)$$

$$\therefore v_y(t) = \frac{E_z}{B_x} \left[1 - \cos\left(\frac{qB_x}{m}t\right)\right]. \quad (30)$$

Realizando a integração em relação a t :

$$s_y(t) = \frac{E_z}{B_x} \left[t - \frac{m}{qB_x} \sin\left(\frac{qB_x}{m}t\right)\right]. \quad (31)$$

Logo a solução nossa será:

$$\mathbf{v}(t) = \left(c, \frac{E_z}{B_x} \left[1 - \cos\left(\frac{qB_x}{m}t\right)\right], \frac{E_z}{B_x} \sin\left(\frac{qB_x}{m}t\right)\right), \quad (32)$$

$$\mathbf{s}(t) = \left(tc, \frac{E_z}{B_x} \left[t - \frac{m}{qB_x} \sin\left(\frac{qB_x}{m}t\right)\right], -\frac{mE_z}{qB_x^2} \cos\left(\frac{qB_x}{m}t\right)\right). \quad (33)$$

Força de Lorentz Fracionária

Para desenvolver a equação da força de Lorentz na sua versão Fracionária, iremos utilizar a derivada fracionária de Caputo, logo:

$$\mathbf{F} = m \left(\frac{1}{\tau^{1-\beta}}\right) {}_c D_t^\beta [\mathbf{v}](t) = q[\mathbf{E} + (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B})], \quad 0 < Re(\beta) \leq 1, \quad (34)$$

em que ${}_c D_t^\beta$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem β e $\frac{1}{\tau^{1-\beta}}$ é fator de correção dimensional (Kuroda; Camargo, 2021). Agora, substituindo os valores de \mathbf{E} e $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ na equação (34):

$$\left(\frac{1}{\tau^{1-\beta}}\right) {}_c D_t^\beta [\mathbf{v}](t) = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}) \quad (35)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\tau^{1-\beta}}\right) {}_c D_t^\beta [\mathbf{v}] = \frac{q}{m} [(0, 0, E_z) + (0, v_z B_x, -v_y B_x)] = \frac{q}{m} (0, v_z B_x, E_z - v_y B_x). \quad (36)$$

Portanto, as componentes da força são:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\tau^{1-\beta}}\right) {}_c D_t^\beta [v_x] = 0 \\ \left(\frac{1}{\tau^{1-\beta}}\right) {}_c D_t^\beta [v_y] = \frac{q}{m} v_z B_x \\ \left(\frac{1}{\tau^{1-\beta}}\right) {}_c D_t^\beta [v_z] = \frac{q}{m} (E_z - v_y B_x). \end{cases} \quad (37)$$

Para dar continuidade, iremos obter v_y na seguinte relação ²:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau^{1-\beta}}\right) {}_c D_t^\beta [v_y] &= \frac{qB_x}{m} v_z \Rightarrow \left(\frac{1}{\tau^{1-\beta}}\right) I^\beta [{}_c D_t^\beta [v_y]] = I^\beta \left[\frac{qB_x}{m} v_z\right] \\ &\Rightarrow v_y = (\tau^{1-\beta}) \frac{qB_x}{m} I^\beta [v_z]. \end{aligned} \quad (38)$$

Substituindo na equação (37), teremos que:

$$\left(\frac{1}{\tau^{1-\beta}}\right) {}_c D_t^\beta [v_z] = \frac{q}{m} \left[E_z - (\tau^{1-\beta}) \frac{qB_x^2}{m} I^\beta [v_z] \right] = \frac{q}{m} E_z - (\tau^{1-\beta}) \left[\frac{qB_x}{m} \right]^2 I^\beta [v_z], \quad (39)$$

utilizando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} s^\beta V_z[s] - s^{\beta-1} v_z(0) &= (\tau^{1-\beta}) \frac{qE_z}{ms} - (\tau^{1-\beta})^2 \left[\frac{qB_x}{m} \right]^2 \mathcal{L}\{\phi_\beta\} * \mathcal{L}\{v_z\} \\ &= (\tau^{1-\beta}) \frac{qE_z}{ms} - (\tau^{1-\beta})^2 \left[\frac{qB_x}{m} \right]^2 \frac{V_z[s]}{s^\beta}. \end{aligned} \quad (40)$$

Considerando $\omega = \frac{qB_x}{m}$ e $v_z(0) = 0$:

$$s^\beta V_z[s] = (\tau^{1-\beta}) \frac{\omega E_z}{B_x s} - (\tau^{1-\beta})^2 \frac{V_z[s]}{s^\beta} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_z[s] \left(s^\beta + \frac{(\tau^{1-\beta} \omega)^2}{s^\beta} \right) &= (\tau^{1-\beta}) \frac{\omega E_z}{B_x s} \Rightarrow V_z[s] = \frac{\omega E_z}{B_x s} \frac{(\tau^{1-\beta})}{\left(s^\beta + \frac{(\tau^{1-\beta} \omega)^2}{s^\beta} \right)} \\ &= \frac{\omega E_z}{B_x s} \frac{(\tau^{1-\beta})}{\left(s^\beta + \frac{(\tau^{1-\beta} \omega)^2}{s^\beta} \right)} \frac{s^{-\beta}}{s^{-\beta}} = \frac{\omega E_z}{B_x s^{\beta+1}} \frac{(\tau^{1-\beta})}{\left(1 + \frac{(\tau^{1-\beta} \omega)^2}{s^{2\beta}} \right)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Como $\left| \frac{(\tau^{1-\beta} \omega)^2}{s^{2\beta}} \right| < 1$, podemos expandir em uma série geométrica, logo:

$$\begin{aligned} V_z[s] &= \frac{\omega E_z (\tau^{1-\beta})}{B_x s^{\beta+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)_n}{n!} \left[\frac{(\tau^{1-\beta} \omega)^2}{s^{2\beta}} \right]^n \\ &= (\tau^{1-\beta}) \frac{E_z \omega}{B_x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[(\tau^{1-\beta} \omega)^2 \right]^n \left[\frac{1}{s^{2\beta}} \right]^n \frac{1}{s^{\beta+1}} \\ &= (\tau^{1-\beta}) \frac{E_z \omega}{B_x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[(\tau^{1-\beta} \omega)^2 \right]^n \frac{1}{s^{2n\beta + \beta + 1}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Fazendo a transformada inversa de Laplace, teremos:

$$\begin{aligned} v_z &= (\tau^{1-\beta}) \frac{E_z \omega}{B_x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[(\tau^{1-\beta} \omega)^2 \right]^n \frac{t^{2n\beta + \beta}}{\Gamma(2n\beta + \beta + 1)} \\ &= (\tau^{1-\beta}) \frac{t^\beta E_z \omega}{B_x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[(\tau^{1-\beta} \omega)^2 \right]^n \frac{t^{2n\beta}}{\Gamma(2n\beta + \beta + 1)}. \end{aligned} \quad (44)$$

²Aqui foi usado o fato de que a integral fracionária de Riemann-Liouville da derivada fracionária de Caputo de mesma ordem resulta na própria função: $I^\beta [{}_c D_t^\beta f(t)] = I^\beta [I^{n-\beta} D^n f(t)] = I^\beta [I^{-\beta} f(t)] = I^{\beta-\beta} [f(t)] = f(t)$.

Podemos simplificar utilizando a Função de Mittag-Leffler de 2 parâmetros:

$$v_z(t, \beta) = \frac{\tau^{1-\beta} \omega E_z t^\beta}{B_x} E_{2\beta, \beta+1} \left[- \left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 t^{2\beta} \right]. \quad (45)$$

Realizando a integração em t com o auxílio da expressão (5), iremos obter a posição da partícula no eixo z :

$$s_z(t, \beta) = \frac{\tau^{1-\beta} \omega E_z t^{\beta+1}}{B_x} E_{2\beta, \beta+2} \left[- \left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 t^{2\beta} \right], \quad (46)$$

voltando na relação (38), iremos agora encontrar v_y :

$$v_y = (\tau^{1-\beta}) \omega I^\beta [v_z] \Rightarrow \mathcal{L}\{v_y\} = (\tau^{1-\beta}) \omega \mathcal{L}\{\phi_\beta\} * \mathcal{L}\{v_z\} \Rightarrow V_y[s] = (\tau^{1-\beta}) \omega \frac{V_z[s]}{s^\beta}, \quad (47)$$

pela expressão (43):

$$\begin{aligned} V_y[s] &= \frac{(\tau^{1-\beta}) \omega E_z \omega}{s^\beta B_x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 \right]^n \frac{1}{s^{2n\beta + \beta + 1}} \\ &= \frac{(\tau^{1-\beta}) \omega^2 E_z}{s^\beta B_x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 \right]^n \frac{1}{s^{2n\beta + \beta + 1}} \\ &= \frac{(\tau^{1-\beta}) \omega^2 E_z}{B_x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 \right]^n \frac{1}{s^{2n\beta + 2\beta + 1}}. \end{aligned} \quad (48)$$

Fazendo a transformada inversa de Laplace:

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{(\tau^{1-\beta}) \omega^2 E_z}{B_x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 \right]^n \frac{t^{2n\beta + 2\beta}}{\Gamma(2n\beta + 2\beta + 1)} \\ &= \frac{(\tau^{1-\beta}) t^{2\beta} \omega^2 E_z}{B_x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 \right]^n \frac{t^{2n\beta}}{\Gamma(2n\beta + 2\beta + 1)} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\therefore v_y(t, \beta) = \frac{\tau^{1-\beta} \omega^2 E_z t^{2\beta}}{B_x} E_{2\beta, 2\beta+1} \left[- \left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 t^{2\beta} \right]. \quad (50)$$

Realizando a integração em t com o auxílio da expressão (5):

$$s_y(t, \beta) = \frac{\tau^{1-\beta} \omega^2 E_z t^{2\beta+1}}{B_x} E_{2\beta, 2\beta+2} \left[- \left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 t^{2\beta} \right]. \quad (51)$$

Portanto:

$$\mathbf{v}(t, \beta) = \left(c, \frac{\tau^{1-\beta} \omega^2 E_z t^{2\beta}}{B_x} E_{2\beta, 2\beta+1} \left[- \left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 t^{2\beta} \right], \frac{\tau^{1-\beta} \omega^2 E_z t^\beta}{B_x} E_{2\beta, \beta+1} \left[- \left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 t^{2\beta} \right] \right), \quad (52)$$

$$\mathbf{s}(t, \beta) = \left(tc, \frac{\tau^{1-\beta} \omega^2 E_z t^{2\beta+1}}{B_x} E_{2\beta, 2\beta+2} \left[- \left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 t^{2\beta} \right], \frac{\tau^{1-\beta} \omega^2 E_z t^{\beta+1}}{B_x} E_{2\beta, \beta+2} \left[- \left(\tau^{1-\beta} \omega \right)^2 t^{2\beta} \right] \right). \quad (53)$$

Como os resultados pela modelagem fracionária são fornecidos por uma série de infinitos termos, existe a necessidade de calcular o raio de convergência R dos valores de t (Boyce; Diprima, 2010), logo:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[-(\tau^{1-\beta}\omega)^2]^{n+1}}{[-(\tau^{1-\beta}\omega)^2]^n} \cdot \frac{\Gamma(2\beta n + 2\beta + 1)}{\Gamma(2\beta n + 4\beta + 1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[-(\tau^{1-\beta}\omega)^2] \cdot \Gamma(2\beta n + 2\beta + 1)}{\Gamma(2\beta n + 4\beta + 1)} \right|. \quad (54)$$

Considerando a aproximação de Stirling³ (Weber; Arfken, 2003):

$$\Gamma(z + 1) \approx \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| [-(\tau^{1-\beta}\omega)^2] \cdot \frac{\sqrt{2\pi(2\beta n + 2\beta)} \left(\frac{2\beta n + 2\beta}{e}\right)^{2\beta n + 2\beta}}{\sqrt{2\pi(2\beta n + 4\beta)} \left(\frac{2\beta n + 4\beta}{e}\right)^{2\beta n + 4\beta}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| [-(\tau^{1-\beta}\omega)^2] \cdot \frac{\sqrt{4\beta\pi}}{\sqrt{4\beta\pi}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \left(\frac{2\beta n + 2\beta}{e}\right)^{2\beta n + 2\beta} \cdot \left(\frac{e}{2\beta n + 4\beta}\right)^{2\beta} \right| \\ &= (\tau^{1-\beta}\omega)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \left(\frac{2\beta n + 2\beta}{2\beta n + 4\beta}\right)^{2\beta n + 2\beta} \cdot \left(\frac{e}{2\beta n + 4\beta}\right)^{2\beta} \right| \\ &= (\tau^{1-\beta}\omega)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{2\beta n + 2\beta}{2\beta n + 4\beta}\right)^{2\beta n + 2\beta} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{e}{2\beta n + 4\beta}\right)^{2\beta} \right| \\ &= (\tau^{1-\beta}\omega)^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow R = \pm\infty. \quad (56) \end{aligned}$$

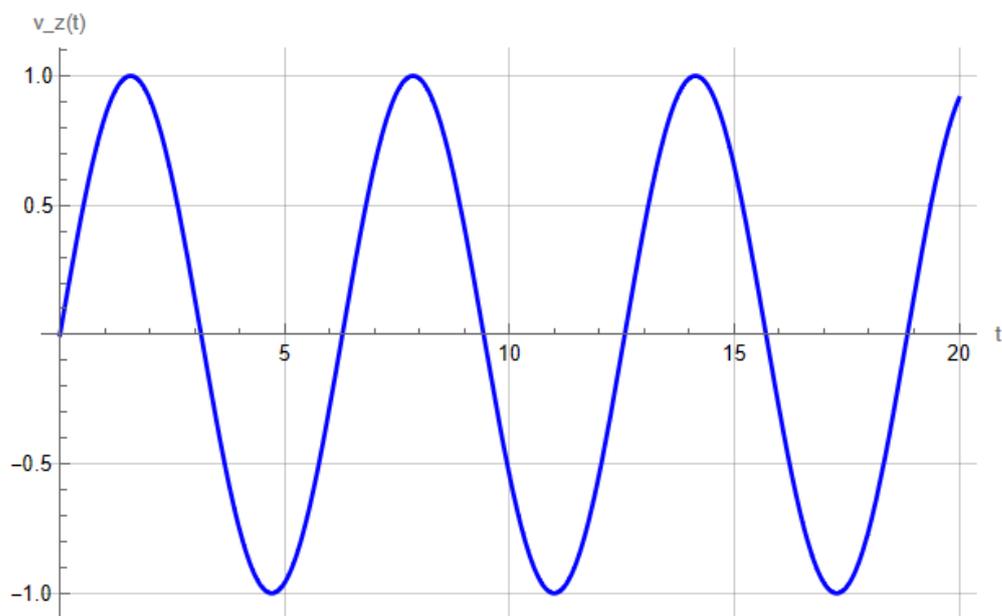
Portanto, $v_y(t, \beta)$ irá convergir para $\forall(t) \in (-\infty, \infty)$. Para $v_z(t, \beta)$, $s_y(t, \beta)$ e $s_z(t, \beta)$ o processos para calcular são parecidos e para todos os casos as séries irá convergir para $\forall(t) \in (-\infty, \infty)$.

Resultados e Conclusão

Considerando $B_x = 1 T$, $E_z = 1 \frac{V}{m}$, $m = 1 kg$, $q = 1 C$, $\omega = 1 s^{-1}$, $\tau = 1 s$ e β variando entre 0 e 1 podemos construir os gráficos das equações (25), (30), (45) e (50):

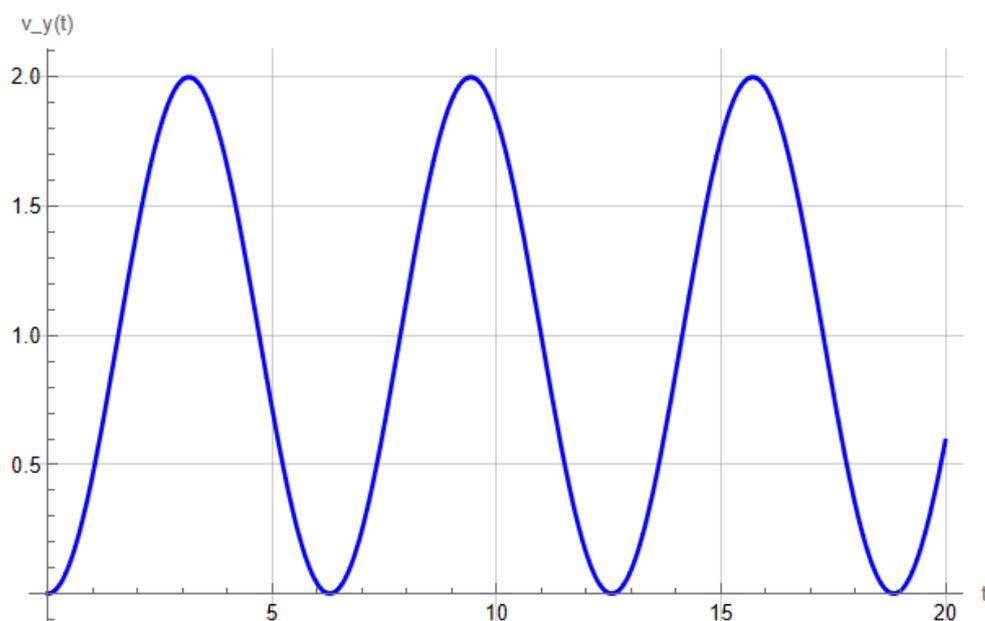
³A igualdade é somente validade para valores suficientemente grandes

Figura 1: Gráfico de $V_z(t)$.



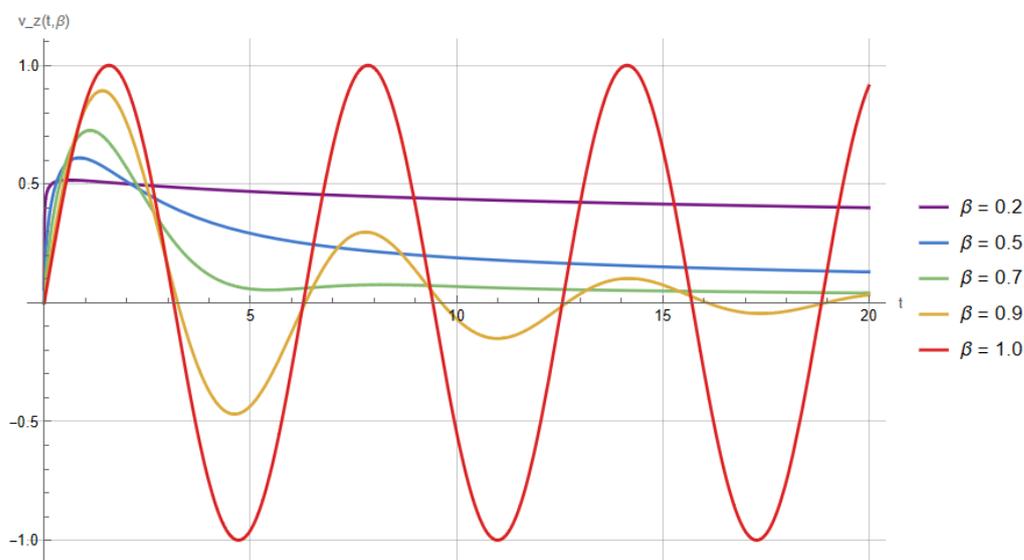
Fonte: Autores

Figura 2: Gráfico de $V_y(t)$.



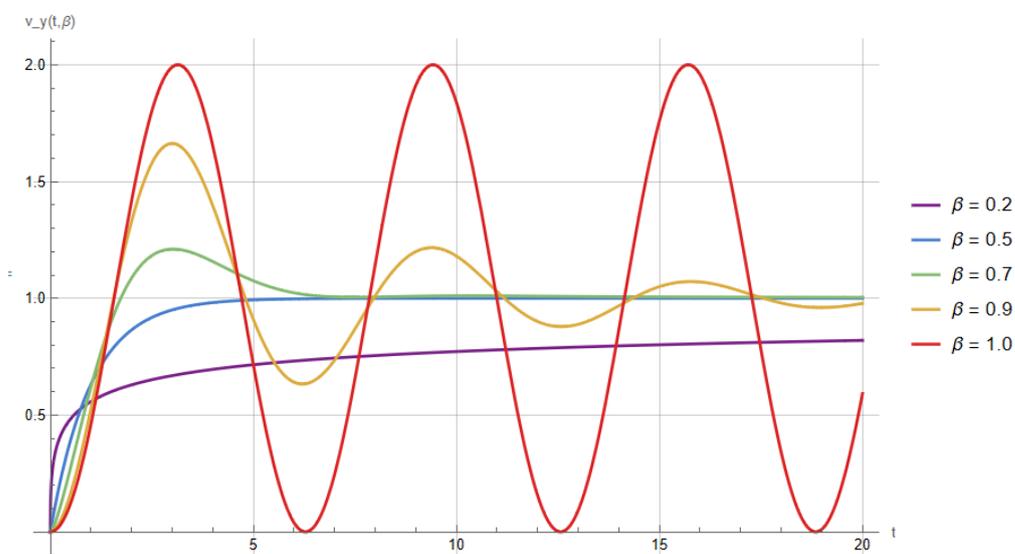
Fonte: Autores

Figura 3: Gráfico de $V_z(t, \beta)$ para distintos valores do parâmetro fracionário.



Fonte: Autores

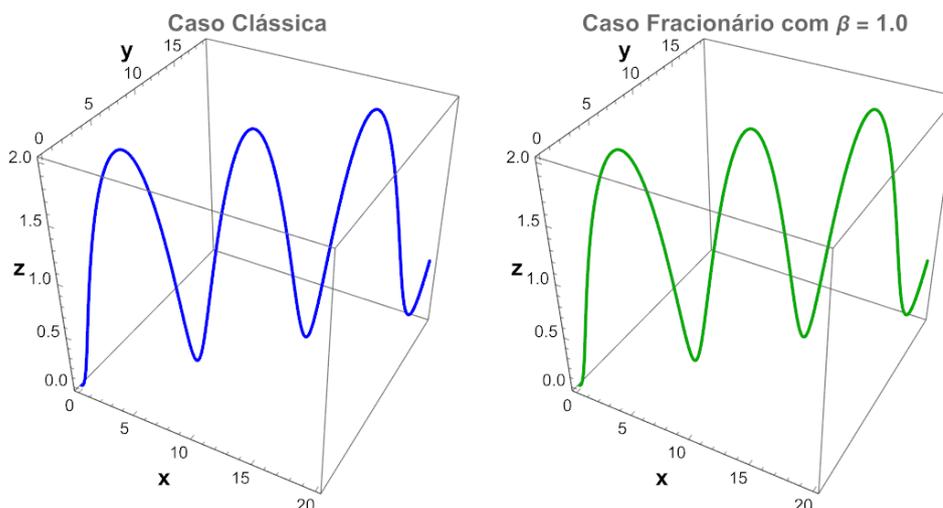
Figura 4: Gráfico de $V_y(t, \beta)$ para distintos valores do parâmetro fracionário.



Fonte: Autores

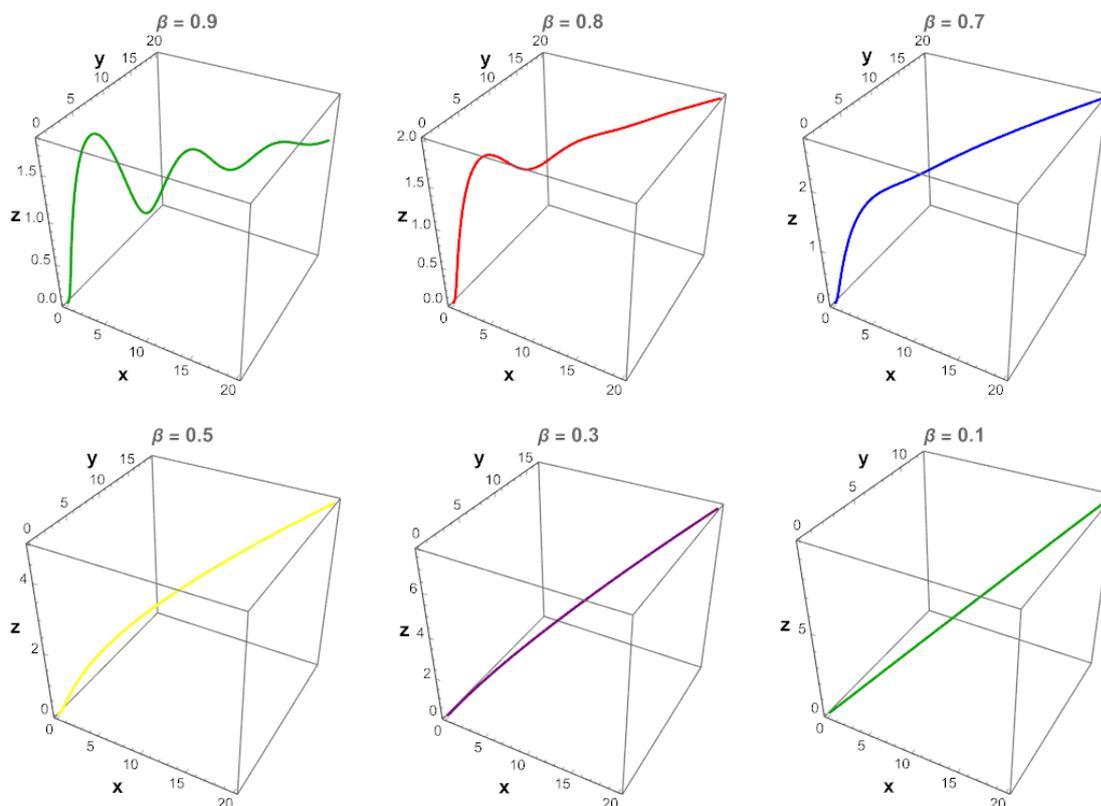
Construindo os gráficos das equações (33) e (53):

Figura 5: Comparação entre a função $s(t)$ e $s(t, \beta)$ em função do tempo para $\beta = 1$.



Fonte: Autores

Figura 6: Comportamento da função $s(t, \beta)$ em função do tempo, para distintos valores do parâmetro fracionário β (0.9, 0.8, 0.7, 0.5, 0.3 e 0.1).



Fonte: Autores



Comparando os gráficos das componentes v_y e v_z modeladas por ordem inteira com a modelagem fracionária e $s(t)$ com $s(t, \beta)$, observamos que, ao utilizarmos a derivada fracionária de Caputo, a solução da EDF apresenta um refinamento associado a um amortecimento na velocidade que varia com β . A intensidade da resistência é inversamente proporcional a β . Em particular, quando $\beta = 1$, a resistência é minimizada, resultando em um comportamento semelhante ao caso ideal sem resistência, assim, recuperando o caso de ordem inteira.

Essa resistência pode estar associada ao meio pelo qual a partícula está se movendo. Quando uma partícula carregada se desloca através de um meio que não é completamente vazio, como um gás ou plasma, ela encontra resistência devido às interações com as partículas do meio. Essas interações resultam em uma força resistiva que atua na partícula, dissipando sua energia cinética e influenciando sua trajetória e velocidade.

Portanto, podemos perceber que a utilização de derivadas fracionárias, neste e em outros diversos problemas, proporciona uma modelagem mais precisa de sistemas físicos onde os efeitos dissipativos são significativos, oferecendo um ajuste contínuo da resistência através do parâmetro β . Isso possibilita a representação de um espectro mais amplo de comportamentos dinâmicos, abrangendo desde sistemas subamortecidos até fortemente amortecidos, assim, podemos perceber como o uso de operadores fracionário é uma ferramenta poderosa para a análise de sistemas.

Agradecimentos

Thiago Massolini Marchesin agradece a Breno Justen de Castro Moreira, por valiosa contribuição nas ideias iniciais deste trabalho. Rubens de Figueiredo Camargo agradece ao grupo de pesquisa CF@FC - Cálculo Fracionário e Aplicações por todo suporte científico.

Referências

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

CAMARGO, R. de F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

CAMARGO, R. de F. **Cálculo Fracionário e aplicações**. 2009. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2009.

CAPUTO, M. **Elasticita e dissipazione**. Bologna: Zanichelli, 1969.

GONÇALVES, G. Difusão anômala e equações fracionárias de difusão. **Acta Scientiarum. Technology**, Maringá, v. 27, n. 2, p. 123-131, 2005.

GORENFLO, R.; MAINARDI, F.; ROGOSIN, S. Mittag-Leffler function: properties and applications. In: **Handbook of Fractional Calculus with Applications**. v. 1. Berlin: De Gruyter, 2019. p. 269–296.

GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2011.



KHALIL, R.; AL HORANI, M.; YOUSEF, A.; SABABHEH, M. A new definition of fractional derivative. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam v. 264, p. 65-70, 2014.

KURODA, L. K. B.; CAMARGO, R. de F. Generalização da Modelagem Fracionária. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, São Paulo, v. 8, n. 1, 2021. São Paulo: SBMAC.

METZLER, R.; KLAFTER, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. **Physics Reports**, v. 339, n. 1, p. 1-77, 2000.

MITTAG-LEFFLER, G. M. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. **Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Paris**, Paris, v. 137, n. 2, p. 554-558, 1903.

ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. A. T. What is a fractional derivative? **Journal of Computational Physics**, Maryland Heights, v. 293, p. 4-13, 2015.

PODLUBNY, I. **Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications**. San Diego: Academic Press, 1999. (Mathematics in Science and Engineering, v. 198)

STEWART, J. **Cálculo**: volume 1. 8. ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2008.

TEODORO, G. S. **Derivadas Fracionárias: tipos e critérios de validade**. 2019. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo: Cengage, 2011.

GOMES, A. V.; CAMARGO, R. de F.; BRUNO ALFONSO, A. Energy bands and Wannier functions of the fractional Kronig-Penney model. **Applied Mathematics and Computation**, v. 380, art. 125266, 2020.

WEBER, H. J.; ARFKEN, G. B. **Essential mathematical methods for physicists**. ISE. Amsterdam: Elsevier, 2003.

WIMAN, A. Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$. **Acta Mathematica**, Somerville, v. 29, p. 191-201, 1905.