

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 27, 2026
Artigo de Pesquisa

Leonardo Maciel Mukdsse Misiara

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Instituto de Ciências Exatas, Seropédica

Pedro Roberto de Lima

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Instituto de Ciências Exatas, Seropédica, pedro-robertodelima@ufrj.br

Uma iniciação à epidemiologia matemática

A primer on mathematical epidemiology

Resumo

Este texto apresenta três modelos muito usados em epidemiologia: o modelo SIS, o modelo SIR e um modelo para a transmissão da toxoplasmose em gatos. O objetivo é fazer uma iniciação ao tema da epidemiologia matemática, ilustrando três abordagens muito usadas em equações diferenciais: resolução explícita, análise qualitativa e experimentação numérica. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica, que possibilitou apresentarmos: a resolução explícita do modelo SIS, identificando condições para a persistência ou extinção da doença; uma análise qualitativa do modelo SIR, revelando o comportamento típico de surtos epidêmicos; e algumas experimentações numéricas para o modelo da toxoplasmose, destacando a influência de diferentes parâmetros na dinâmica de transmissão. Diante da importância do assunto e do grau de detalhamento da exposição, acreditamos que o presente texto proporciona uma leitura útil a estudantes que estão iniciando na temática da epidemiologia e/ou da análise de equações diferenciais.

Palavras-chave: modelo SIS; modelo SIR; toxoplasmose; análise qualitativa; experimentação numérica.

Abstract

This text presents three models widely used in epidemiology: the SIS model, the SIR model, and a model for the transmission of toxoplasmosis in cats. The aim is to provide an initiation into the field of mathematical epidemiology by illustrating three common approaches in differential equations: explicit solution, qualitative analysis, and numerical experimentation. The methodology adopted was bibliographic research, which allowed us to present: the explicit solution of the SIS model, identifying conditions for disease persistence or extinction; a qualitative analysis of the SIR model, revealing the typical behavior of epidemic outbreaks; and some numerical experiments for the toxoplasmosis model, highlighting the influence of different parameters on the transmission dynamics. Given the importance of the subject and the level of detail in the exposition, we believe that this text offers a useful reading for students entering the field of epidemiology and/or the analysis of differential equations.

Keywords: SIS model; SIR model; toxoplasmosis; qualitative analysis; numerical experimentation.



1 Introdução

A modelagem matemática tem-se consolidado como uma ferramenta essencial para a compreensão da dinâmica de doenças infecciosas. Por meio da formulação de sistemas de equações diferenciais é possível descrever e prever a propagação de uma epidemia, fornecendo subsídios teóricos para a tomada de decisões em saúde pública. Nesse contexto, os modelos compartimentais são amplamente utilizados para representar a dinâmica das infecções, sendo assim chamados porque dividem a população em diferentes grupos com características epidemiológicas semelhantes – os quais são chamados de “compartimentos”. Neste trabalho, estudaremos três desses modelos, todos formulados como sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias: o modelo Suscetíveis-Infectados-Suscetíveis (SIS), o modelo Suscetíveis-Infectados-Recuperados (SIR) e um modelo específico para a transmissão da toxoplasmose em gatos que, por brevidade, chamaremos de Suscetíveis-Infectados na forma aguda-Cronicamente infectados-Espaço ambiental (SICE).

O modelo SIS é um dos modelos mais simples e fundamentais no campo da epidemiologia. Ele considera que a população está dividida em dois compartimentos: “suscetíveis” (indivíduos livres da doença mas que podem ser contaminados) e “infectados” (indivíduos contaminados que atuam como transmissores). Esse modelo descreve doenças em que os indivíduos infectados, após se recuperarem, retornam à classe dos suscetíveis, não adquirindo imunidade. Seu estudo, que será feito na Seção 2, nos permite entender a dependência da dinâmica da infecção em relação aos parâmetros do modelo, revelando condições sob as quais uma doença pode se extinguir ou persistir na população.

O modelo SIR, por sua vez, é um modelo amplamente estudado em epidemiologia para modelar doenças que conferem imunidade permanente após a infecção. Para isso, ele incorpora um compartimento de “recuperados” (indivíduos que tiveram a doença, mas que já se curaram, deixando de transmiti-la e nunca mais voltando a contraí-la). O resultado central na análise desse modelo, que será estudado na Seção 3, é o Teorema do Limiar Epidêmico. Como veremos, esse teorema é importante porque estabelece condições para a existência ou inexistência de um futuro “surto epidêmico” (isto é, um aumento expressivo no número de doentes simultâneos, seguido de queda).

Finalmente, o modelo SICE – introduzido em [1] e discutido em [2] – é um modelo mais recente e menos conhecido do que os anteriores. Ele tem o objetivo de modelar a propagação da toxoplasmose em gatos.

A **toxoplasmose** é uma das zoonoses (doenças transmitidas por animais) mais comuns do mundo. É uma doença infecciosa causada pelo protozoário chamado *Toxoplasma gondii*, cujos hospedeiros definitivos são gatos e outros felinos (como onças, jaguatiricas, gatos-do-mato dentre outros). O parasito *T. gondii* pode ser eliminado pelas fezes desses animais infectados contaminando o meio ambiente. A partir daí, o parasito pode infectar todos os animais de sangue quente, inclusive aves e mamíferos aquáticos. [3]

Assim como os modelos anteriores, o modelo SICE também possui um compartimento de suscetíveis – o qual abriga os indivíduos saudáveis. Entretanto, o compartimento dos infectados é subdividido em dois: “infectados agudos” (estágio inicial da doença com maior carga parasitária) e “cronicamente infectados” (estágio posterior da doença com menor carga parasitária). Além disso, não há compartimento de recuperados e há, ainda, o compartimento do “espaço ambiental” ou, simplesmente, “ambiente” (no inglês, *environment* – que fica compatível com nossa escolha de E na sigla SICE) abrigando os “oocistos” – que são formas resistentes do parasita eliminadas nas fezes

dos gatos e capazes de sobreviver por longos períodos no ambiente, sendo responsáveis por novas infecções ao serem ingeridos. No estudo desse modelo, que faremos na Seção 4, veremos como as taxas de reprodução e de liberação de oocistos no ambiente afetam o comportamento da população.

Até aqui, discutimos brevemente os modelos que serão estudados nas seções seguintes e demos uma ideia dos resultados que serão apresentados. A seguir, passaremos a discutir os métodos de abordagens que nos conduzirão a tais resultados. Para isso, começamos observando que o estudo de equações diferenciais pode ser realizado a partir de três abordagens complementares: a resolução explícita, a análise qualitativa e a experimentação numérica. Cada uma dessas perspectivas oferece ferramentas distintas para compreender o comportamento das soluções do modelo.

A resolução explícita consiste em encontrar uma função definida explicitamente que satisfaça a equação diferencial e as condições iniciais associadas. Isso envolve aplicar métodos clássicos, como separação de variáveis, fator integrante ou mudanças de variáveis, com o objetivo de exibir a solução da equação diferencial em termos da variável independente. Quando possível, essa abordagem oferece uma forma direta de estudar a evolução do sistema. No entanto, muitos modelos relevantes – especialmente aqueles com estrutura não linear – não admitem soluções definidas explicitamente, o que limita o alcance dessa técnica. Como é afirmado em [4, p. 6], em muitos casos “as soluções de uma equação diferencial costumam ser muito mais complicadas do que a própria função que define a equação”, sendo raras as situações em que se pode obter soluções exatas. Nesse contexto, surge a análise qualitativa, que busca compreender o comportamento geral das soluções sem necessariamente obtê-las de forma explícita. Essa perspectiva é útil para investigar propriedades como existência, unicidade e comportamento assintótico mesmo sem dispor de solução explícita. Porém, ocorre com certa frequência, especialmente para modelos complexos, que certas propriedades (como comportamento assintótico) dependem de relações específicas entre certos parâmetros do modelo – que nem sempre são fáceis de deduzir quando nos deparamos com um modelo novo. Nesse contexto, surge a experimentação numérica que, por meio de recursos computacionais, pode fornecer uma visão geral da influência dos parâmetros no comportamento assintótico do modelo podendo, desta forma, sugerir linhas de investigação para a análise qualitativa:

A experimentação numérica pode fornecer um entendimento “rápido” sobre o modelo em estudo, e pode confirmar (ou refutar) hipóteses sobre os mecanismos básicos subjacentes ao sistema de interesse. Os resultados da experimentação numérica podem sugerir direções a seguir para uma análise matemática mais rigorosa e para novas modificações do modelo. [2, p. 156, tradução nossa].

As três abordagens acima descritas serão exploradas nesse trabalho: o estudo do modelo SIS será realizado por meio da resolução explícita, o estudo do modelo SIR por meio da análise qualitativa e o estudo do modelo SICE por meio da experimentação numérica. Todos os resultados apresentados são conhecidos na literatura especializada, exceto por algumas experimentações numéricas referentes a algumas variantes do modelo SICE que, até onde sabemos, ainda não foram exploradas. Assim, nossa maior contribuição tem caráter didático, não só por iniciar os leitores ao tema dos modelos compartimentais, que são fundamentais na epidemiologia matemática, mas também por iniciá-los em técnicas fundamentais na área de análise de equações diferenciais oferecendo demonstrações detalhadas que envolvem importantes aplicações dos clássicos Teorema de Picard, Teorema de Extensão e Teorema da Invariância.

Observação 1 *Os modelos matemáticos abordados nesse texto são todos formulados em termos de equações diferenciais ordinárias. Supondo que as variáveis envolvidas evoluem dependendo*

apenas do tempo e de forma contínua, eles se destacam pela simplicidade da formulação sendo, portanto, propícios a uma iniciação à temática. Porém, cabe ressaltar que nem todos os modelos epidemiológicos matemáticos são expressos dessa forma. Por exemplo: uma introdução abrangente incluindo modelos que envolvem variáveis discretas, equações diferenciais com retardo e equações diferenciais parciais pode ser encontrada em [5]; introduções a modelos envolvendo redes podem ser encontradas em [6, 7]; uma introdução a modelos estocásticos pode ser encontrada em [8]; uma visão geral sobre modelos baseados em agentes pode ser vista em [9].

2 O modelo SIS

Nesta seção, faremos uma breve apresentação do modelo SIS, baseada em [2] e [10], exemplificando o uso da técnica mais básica de estudo das equações diferenciais: a resolução explícita.

2.1 Descrição do modelo

O modelo SIS é um dos modelos epidemiológicos mais simples para descrever a propagação de doenças infecciosas. Ele supõe que a população está totalmente distribuída em dois compartimentos disjuntos:

- **Suscetíveis (S):** indivíduos saudáveis que podem adquirir a doença a partir do contato com indivíduos doentes.
- **Infectados (I):** portadores da doença capazes de transmiti-la a indivíduos saudáveis.

Representando por $S = S(t)$ a quantidade de suscetíveis no instante t , e por $I = I(t)$ a quantidade de infectados, o modelo SIS é dado pelo sistema de equações diferenciais

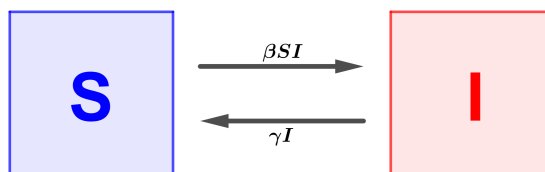
$$\begin{cases} S' = -\beta SI + \gamma I \\ I' = \beta SI - \gamma I \end{cases} \quad (1)$$

sujeito às condições iniciais

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0. \quad (2)$$

A não negatividade dos dados iniciais reflete a hipótese de que eles representam quantidade de indivíduos. Os parâmetros β e γ são constantes positivas chamadas de **taxa de transmissão** e **taxa de recuperação**, respectivamente. O termo βSI representa a taxa com que indivíduos saem da classe S e entram na classe I, e reflete a hipótese de que a taxa com que os suscetíveis se contaminam é proporcional à quantidade de encontros possíveis entre suscetíveis e infectados (isto é, proporcional ao produto SI). Já o termo γI representa a taxa com que indivíduos saem da classe I e entram na classe S. Ele reflete a hipótese de que a taxa com que os infectados se curam é proporcional à quantidade de infectados existentes. A Figura 1 ilustra a dinâmica de transmissão.

Figura 1: Dinâmica de transmissão do modelo SIS.



Fonte: Elaborada pelos autores.

O fato de que os indivíduos da classe I retornam para a classe S reflete a hipótese de que não há imunidade adquirida após a infecção, ou seja, os infectados voltam a ser suscetíveis após a recuperação (isto é, podem ser infectados novamente como ocorre, por exemplo, com o resfriado comum). Note que, somando as duas equações do sistema (1), obtemos $(S + I)' = 0$, ou seja, a soma $S + I$ é constante. Isso reflete a hipótese de que a população permanece constante ao longo do tempo (não há migrações, nascimentos nem mortes). Assim, representando por N o número total de indivíduos da população, temos

$$S + I = N. \quad (3)$$

Na próxima seção, com base no estudo da solução explícita do sistema, veremos que esse modelo apresenta dois comportamentos possíveis:

- Se $\beta N - \gamma \leq 0$, o número de infectados simultâneos vai decrescendo e a doença se extingue (isto é, o compartimento dos infectados vai diminuindo com o passar do tempo até ficar vazio).
- Se $\beta N - \gamma > 0$, a doença persistirá na população com o número de infectados ficando aproximadamente constante ao longo do tempo (isto é, a doença entrará em **estado endêmico**).

Observação 2 Dividindo (1)-(2) por N e escrevendo $\tilde{S} = \frac{S}{N}$, $\tilde{I} = \frac{I}{N}$, $\tilde{\beta} = N\beta$, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} \tilde{S}' = -\tilde{\beta}\tilde{S}\tilde{I} + \gamma\tilde{I} \\ \tilde{I}' = \tilde{\beta}\tilde{S}\tilde{I} - \gamma\tilde{I} \end{cases} \quad (4)$$

com condições iniciais

$$\tilde{S}(0) = \tilde{S}_0, \quad \tilde{I}(0) = \tilde{I}_0, \quad (5)$$

onde $\tilde{S}$, $\tilde{I}$, $\tilde{S}_0 = \frac{S_0}{N}$ e $\tilde{I}_0 = \frac{I_0}{N}$ representam proporções da população em vez de números totais de indivíduos. Nesse caso, a totalidade da população é expressa por $\tilde{N} = 1$. Essa mudança de variáveis é especialmente útil para plotar os gráficos e será usada nas Figuras 2, 3 e 4 (por simplicidade, sem mudança de notação). Comentário análogo se aplica ao modelo SIR estudado na Seção 3.

2.2 Resolução explícita

Suponha que o problema (1)-(2) possua uma solução, onde o dado inicial I_0 satisfaz as seguintes condições: $I_0 > 0$ e $I_0 \neq \frac{\beta N - \gamma}{\beta}$ (ou seja, $-\beta I_0 + \beta N - \gamma \neq 0$). Devido à continuidade de I (implicada por sua derivabilidade), devemos ter

$$I > 0 \quad \text{e} \quad -\beta I + \beta N - \gamma \neq 0 \quad (6)$$

em algum intervalo da forma $[0, b)$. Vamos aplicar o método da separação de variáveis para encontrar esta solução.

De (3) temos $S = N - I$. Substituindo na segunda equação de (1), segue que

$$I' = \beta(N - I)I - \gamma I = \beta NI - \beta I^2 - \gamma I = I(-\beta I + \beta N - \gamma). \quad (7)$$

Escrevendo $I' = \frac{dI}{dt}$, separando as variáveis e integrando os dois lados, obtemos

$$\int \frac{dI}{I(\beta N - \beta I - \gamma)} = \int dt. \quad (8)$$

Note que esse cálculo é legítimo em razão de (6), que garante que não estamos dividindo por zero. É por isso que foi necessário impor condições sobre o dado inicial I_0 .

Pelo método das frações parciais, temos

$$\int \frac{dx}{x(ax + b)} = \int \frac{1}{bx} dx - \int \frac{a}{b(ax + b)} dx = \frac{1}{b} \ln|x| - \frac{1}{b} \ln|ax + b| + K_1 = \frac{1}{b} \ln \left| \frac{x}{ax + b} \right| + K_1$$

desde que $b \neq 0$. Supondo que $\beta N - \gamma \neq 0$ e aplicando a fórmula acima com $b = \beta N - \gamma$ e $a = -\beta$, obtemos

$$\int \frac{dI}{I(\beta N - \beta I - \gamma)} = \int \frac{dI}{I(aI + b)} = \frac{1}{\beta N - \gamma} \ln \left| \frac{I}{-\beta I + \beta N - \gamma} \right| + K_1. \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8) obtemos

$$\frac{1}{\beta N - \gamma} \ln \left| \frac{I}{-\beta I + \beta N - \gamma} \right| + K_1 = t + K_2,$$

ou seja,

$$\ln \left| \frac{I}{-\beta I + \beta N - \gamma} \right| = (\beta N - \gamma)(t + C_1).$$

Tomando a exponencial dos dois lados resulta que

$$\frac{I}{-\beta I + \beta N - \gamma} = A e^{(\beta N - \gamma)(t + C_1)} = A e^{(\beta N - \gamma)t} e^{(\beta N - \gamma)C_1} = C_2 e^{(\beta N - \gamma)t},$$

sendo $A = 1$ (caso $-\beta I + \beta N - \gamma > 0$ em $[0, b)$), ou $A = -1$ (caso $-\beta I + \beta N - \gamma < 0$ em $[0, b)$), ou seja,

$$I = C_2 e^{(\beta N - \gamma)t} (-\beta I + \beta N - \gamma) = C_2 e^{(\beta N - \gamma)t} (\beta N - \gamma) - C_2 e^{(\beta N - \gamma)t} \beta I.$$

Isolando I , obtemos

$$I = \frac{C_2 e^{(\beta N - \gamma)t} (\beta N - \gamma)}{C_2 e^{(\beta N - \gamma)t} \beta + 1}.$$

Usando a condição inicial $I(0) = I_0$, obtemos $C_2 = \frac{I_0}{-\beta I_0 + \beta N - \gamma}$. Além disso, como $S(0) = S_0$, segue de (3) que $N - I_0 = S_0$. Portanto, $C_2 = \frac{I_0}{\beta S_0 - \gamma}$. Assim, a expressão de I se reescreve como

$$I = \frac{\frac{I_0}{\beta S_0 - \gamma} e^{(\beta N - \gamma)t} (\beta N - \gamma)}{\frac{I_0}{\beta S_0 - \gamma} e^{(\beta N - \gamma)t} \beta + 1} = \frac{(\beta N - \gamma) I_0}{\beta I_0 + (\beta S_0 - \gamma) e^{-(\beta N - \gamma)t}}. \quad (10)$$

Consequentemente, S é dada por

$$S = N - I = N - \frac{(\beta N - \gamma)I_0}{\beta I_0 + (\beta S_0 - \gamma)e^{-(\beta N - \gamma)t}}. \quad (11)$$

Até o momento mostramos que, se existem S e I diferenciáveis satisfazendo o problema (1)-(2) num intervalo da forma $[0, b)$ com um dado inicial positivo $I_0 \neq \frac{\beta N - \gamma}{\beta}$, então, no caso em que $\beta N - \gamma \neq 0$, temos necessariamente que I e S são dadas por (10) e (11). Mas, um cálculo direto (derivando e substituindo nas equações) mostra que S e I dadas por essas expressões realmente satisfazem as condições iniciais e o sistema em $[0, \infty)$. Isso estabelece que, no caso $\beta N - \gamma \neq 0$, existe uma única solução em $[0, \infty)$ para o problema (1)-(2) com dado inicial positivo $I_0 \neq \frac{\beta N - \gamma}{\beta}$, a qual é dada pelas funções I e S definidas explicitamente por (10) e (11).

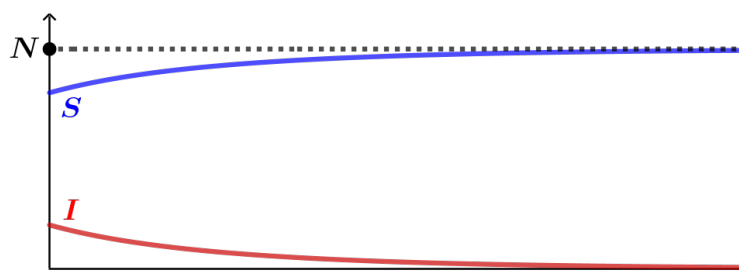
Diante disso, podemos tirar conclusões sobre o comportamento da doença com base no comportamento assintótico da solução.

- Se $\beta N - \gamma < 0$, temos $\gamma - \beta N > 0$. Daí,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\beta N - \gamma)I_0}{\beta I_0 + (\beta S_0 - \gamma)e^{-(\beta N - \gamma)t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - \beta N)I_0}{-\beta I_0 + (\gamma - \beta S_0)e^{(\gamma - \beta N)t}} = 0.$$

Isso mostra que, conforme o tempo passa, I se aproxima de zero, ou seja, a doença tende a desaparecer da população. Como o numerador do último limite é constante positivo e o seu denominador é estritamente crescente, essa aproximação ocorre de forma estritamente decrescente, ou seja: o número de indivíduos simultaneamente infectados se aproxima de zero diminuindo cada vez mais, sem nunca sofrer qualquer aumento. A Figura 2 ilustra essa situação.

Figura 2: Gráfico das funções (10) e (11) gerado com $N = 1$; $S_0 = 0,8$; $I_0 = 0,2$; $\beta = 2$; $\gamma = 3$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

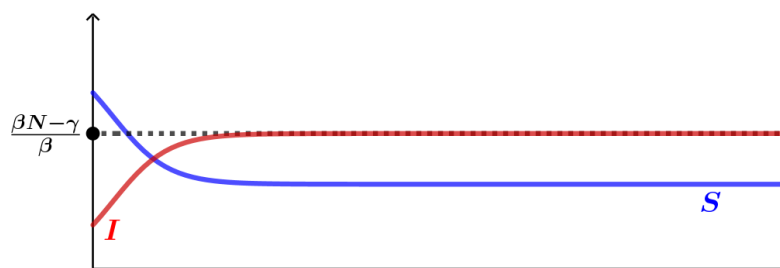
- Se $\beta N - \gamma > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\beta N - \gamma)I_0}{\beta I_0 + (\beta S_0 - \gamma)e^{-(\beta N - \gamma)t}} = \frac{(\beta N - \gamma)I_0}{\beta I_0 + (\beta S_0 - \gamma) \cdot 0} = \frac{\beta N - \gamma}{\beta}.$$

Isso mostra que, conforme o tempo passa, I se aproxima de $\frac{\beta N - \gamma}{\beta}$, ou seja, a doença se mantém presente na população e, após certo tempo, o número de indivíduos infectados tende a se estabilizar num certo valor. Note que:

- Se $\beta S_0 - \gamma > 0$ (isto é $I_0 < \frac{\beta N - \gamma}{\beta}$), então o denominador de I é estritamente decrescente. Portanto, como o numerador é constante positivo, a referida aproximação ocorre de forma estritamente crescente. A Figura 3 ilustra a essa situação.

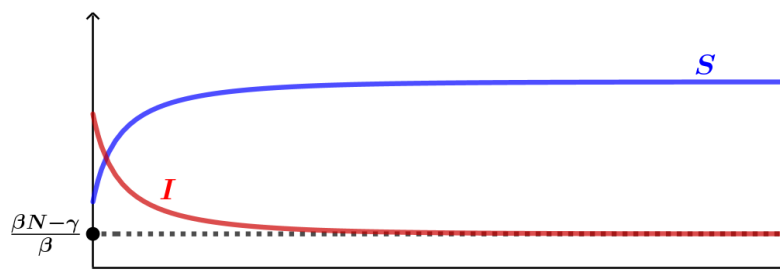
Figura 3: Gráfico das funções (10) e (11) gerado com $N = 1$; $S_0 = 0,8$; $I_0 = 0,2$; $\beta = 13$; $\gamma = 5$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

- Se $\beta S_0 - \gamma < 0$ (isto é, $I_0 > \frac{\beta N - \gamma}{\beta}$), o denominador de I é estritamente crescente. Portanto, como o numerador é constante positivo, a referida aproximação ocorre de forma estritamente decrescente. A Figura 4 ilustra a essa situação.

Figura 4: Gráfico das funções (10) e (11) gerado com $N = 1$; $S_0 = 0,3$; $I_0 = 0,7$; $\beta = 13$; $\gamma = 11$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Observação 3 Se $\beta N - \gamma = 0$, a equação (7) toma a forma simplificada $I' = -\beta I^2$. Nesse caso, pelo mesmo método da separação de variáveis, obtemos as seguintes formas explícitas para I e S :

$$I(t) = \frac{I_0}{1 + \beta I_0 t}, \quad S(t) = \frac{S_0 + N\beta I_0 t}{1 + \beta I_0 t}.$$

Nessa situação, I apresenta o mesmo comportamento assintótico do caso $\beta N - \gamma < 0$, isto é, a doença tende a desaparecer, pois I decresce estritamente a zero.

Observação 4 Se analisarmos o cálculo utilizado para mostrar que (10) e (11) satisfazem o problema (1)-(2), veremos que ele não necessita de qualquer restrição sobre I_0 , ou seja, ele também é válido quando $I_0 = 0$ ou $I_0 = \frac{\beta N - \gamma}{\beta}$. Assim, obtemos existência de solução para qualquer dado inicial $I_0 \geq 0$. Entretanto, esses cálculos não estabelecem a unicidade dos casos $I_0 = 0$ e $I_0 = \frac{\beta N - \gamma}{\beta}$. Uma ferramenta eficiente para estabelecer tanto existência quanto unicidade será explorada na seção seguinte.

Observação 5 Nas Figuras 2, 3 e 4, os parâmetros foram escolhidos de modo a ilustrar, de forma visualmente clara, os diferentes comportamentos previstos pela análise teórica realizada. Comentário análogo se aplica às Figuras 6, 7 e 8. Escolhas com significado biológico dependem de dados reais e características específicas da doença a ser modelada (veja, por exemplo, a Seção 4.2 de [11]).

3 O modelo SIR

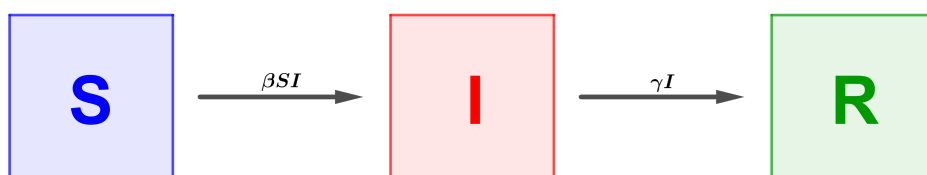
Nesta seção, faremos uma breve apresentação do modelo SIR, baseada nas discussões de [2], [10], [11] e [12]. Nessa apresentação, exemplificaremos o uso de uma das técnicas mais importantes para o estudo das equações diferenciais: a análise qualitativa.

Observação 6 De modo geral, a análise qualitativa de equações diferenciais é bastante abrangente. Aqui, nos limitaremos a existência, unicidade e comportamento assintótico. Uma discussão envolvendo pontos de equilíbrio e estabilidade pode ser encontrada em [10].

3.1 Descrição do modelo

O modelo SIR é amplamente utilizado para descrever a dinâmica de certas doenças infecciosas. A principal diferença desse modelo em relação ao modelo SIS é que ele inclui um terceiro compartimento, chamado de **Recuperados (R)**, que tem a finalidade de reunir todos os indivíduos que passaram pela infecção e já deixaram de transmiti-la. Assim sendo, os indivíduos que saem de I não voltam para S. Em vez disso, eles entram no compartimento R e não saem dele (nunca mais se tornam suscetíveis nem infectados). Isso reflete a hipótese de que os indivíduos, após serem infectados, desenvolvem imunidade permanente (como ocorre, por exemplo, com o sarampo, a caxumba e a rubéola). As hipóteses sobre as taxas com que os indivíduos mudam de compartimentos são análogas às hipóteses do modelo SIS: eles saem de S a uma taxa proporcional ao produto SI (quantidade de encontros possíveis entre suscetíveis e infectados) e saem de I a uma taxa proporcional a I (quantidade de infectados). A Figura 5 ilustra a dinâmica de transmissão desse modelo.

Figura 5: Dinâmica de transmissão do modelo SIR.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Matematicamente, representando por $S = S(t)$ a quantidade de suscetíveis no instante t , por $I = I(t)$ a quantidade de infectados e por $R = R(t)$ a quantidade de recuperados, essa dinâmica de transmissão é modelada pelo sistema

$$\begin{cases} S' = -\beta SI \\ I' = \beta SI - \gamma I \\ R' = \gamma I \end{cases} \quad (12)$$

sujeito às seguintes condições iniciais:

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0, \quad R(0) = R_0 \geq 0. \quad (13)$$

Analogamente ao modelo SIS, β e γ são constantes positivas e, somando as equações, obtemos $(S + I + R)' = 0$ de modo que

$$S + I + R = N, \quad (14)$$

onde N é uma constante positiva que representa o número total de indivíduos da população. Na próxima seção, com base em uma análise qualitativa do sistema, veremos que esse modelo apresenta dois comportamentos possíveis:

- Se $\beta S_0 - \gamma \leq 0$, o número de infectados vai diminuindo cada vez mais e a doença se extingue (este comportamento é similar ao comportamento do caso $\beta N - \gamma \leq 0$ do modelo SIS).
- Se $\beta S_0 - \gamma > 0$, o número de infectados vai aumentando até atingir um pico e, após isso, vai diminuindo cada vez mais até a doença se extinguir (este comportamento é não monótono e, portanto, drasticamente diferente dos comportamentos verificados no modelo SIS).

Note que as desigualdades $\beta S_0 - \gamma \leq 0$ e $\beta S_0 - \gamma > 0$ podem ser expressas, respectivamente, por $\frac{\beta S_0}{\gamma} \leq 1$ e $\frac{\beta S_0}{\gamma} > 1$. Assim, o comportamento da doença é determinado pelo número $\frac{\beta S_0}{\gamma}$, o qual é chamado de **número efetivo de reprodução** (ou **valor de reprodutibilidade basal**) e será representado por $\mathcal{R}_e$, ou seja,

$$\mathcal{R}_e = \frac{\beta S_0}{\gamma}. \quad (15)$$

Observação 7 Suponha que inicialmente haja um único indivíduo infectado. Então, no instante $t = 0$ a quantidade de indivíduos infectados (isto é, a quantidade de indivíduos que passa de S para I) é $\beta S(0)I(0) = \beta S_0$ (pois $S' = -\beta SI$ e $I(0) = 1$). Suponha que o tempo médio de recuperação seja k dias e que aquele único indivíduo infectado ande pela população sempre encontrando novos indivíduos suscetíveis, sem reencontrar aqueles que já foram infectados. Então, ao final dos k dias ele terá infectado, em média, $\beta S_0 k$ indivíduos. Por outro lado, os $I(t)$ indivíduos infectados num instante t vão demorar, em média, k dias para se recuperarem. Assim, em média, vão se recuperar $\frac{I(t)}{k}$ indivíduos por dia. Em outras palavras: em média, $\frac{1}{k}I(t)$ passam para o compartimento R por dia. Por essa razão, como $R' = \gamma I$, interpreta-se que $\gamma = \frac{1}{k}$. Nesse sentido, do ponto de vista biológico, o número efetivo de reprodução $\mathcal{R}_e = \frac{\beta S_0}{\gamma} = \beta S_0 k$ representa a quantidade de novas infecções causadas por um único infectado inserido numa população totalmente suscetível.

3.2 Análise qualitativa

No estudo do modelo SIS, a existência e a unicidade de solução foram estabelecidas por meio da resolução explícita. Entretanto, na maioria das vezes esse método não pode ser aplicado porque pode ser muito difícil, ou até mesmo impossível, resolver o sistema explicitamente. Nesses casos, o estudo se fundamenta em teoremas gerais que estabelecem existência e unicidade para sistemas da forma

$$\begin{cases} u'_1(t) = f_1(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \\ u'_2(t) = f_2(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \\ \vdots \\ u'_n(t) = f_n(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \end{cases} \quad (16)$$

com condições iniciais

$$u_1(t_0) = u_{10}, \quad u_2(t_0) = u_{20}, \quad \dots, \quad u_n(t_0) = u_{n0}. \quad (17)$$

O trabalho se concentra, então, em demonstrar que o modelo em estudo satisfaz as hipóteses do teorema geral. O mais básico deles é apresentado a seguir.

Teorema 8 (Teorema de Picard) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$ um aberto e $f_1, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas cujas derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial u_j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(i, j = 1, \dots, n)$, existam e sejam contínuas. Então, dado $(t_0, u_{10}, \dots, u_{n0}) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I contendo t_0 sobre o qual o problema (16)-(17) possui uma única solução.*

Demonstração. Ver Teorema 6 e Teorema 7 do Capítulo 12 de [13]. □

Observação 9 *O Teorema 8 também é chamado de Teorema de Picard-Lindelöf. Sua versão mais geral, que substitui a hipótese sobre derivadas parciais pela condição local de Lipschitz, pode ser encontrada no Teorema 2.4 de [4].*

Em muitas situações aplicadas, nas quais a variável t representa o tempo, espera-se que a solução do problema (16)-(17) esteja definida para todo $t \geq 0$ (isto é, não queremos ficar restritos a um período finito; queremos saber o que ocorre em qualquer instante futuro). Porém, o Teorema de Picard fornece existência de solução apenas num intervalo finito que pode ser bastante pequeno. Esse problema é resolvido pelo próximo teorema, que fornece condições para que a solução possa ser estendida a todo $t > 0$.

Teorema 10 (Teorema de Extensão) *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 8, a solução do problema (16)-(17) dada pelo referido teorema pode ser estendida, de forma única, a um intervalo maximal (a, b) . Além disso:*

- Se $a > -\infty$, então $\lim_{t \rightarrow a^+} \|(u_1(t), \dots, u_n(t))\| = \infty$.
- Se $b < \infty$, então $\lim_{t \rightarrow b^-} \|(u_1(t), \dots, u_n(t))\| = \infty$.

Demonstração. Ver Proposição 3.2 e Corolário 3.7 de [4]. □

Observação 11 *No teorema acima, $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana. Dizer que (a, b) é maximal significa que a solução não pode ser estendida a um intervalo aberto maior, isto é, (a, b) é o maior intervalo aberto sobre o qual uma solução existe. As condições sobre os limites implicam que, sempre que a solução é limitada em $\mathbb{R}^n$, ela está definida em toda a reta (isto é, a e b não podem ser finitos).*

Diante desses resultados, estamos em condições de estabelecer existência e unidade de solução para o modelo SIR.

Teorema 12 (Existência e unicidade para o modelo SIR) *O problema (12)-(13) possui uma única solução (S, I, R) no intervalo $[0, \infty)$. Além disso,*

$$S(t) \geq 0, \quad I(t) \geq 0, \quad R(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (18)$$

Demonstração. O problema (12)-(13) é da forma (16)-(17) com $u_1 = S$, $u_2 = I$, $u_3 = R$, $f_1(t, x, y, z) = -\beta xy$, $f_2(t, x, y, z) = \beta xy - \lambda y$ e $f_3(t, x, y, z) = \gamma y$. Como f_1, f_2, f_3 são funções polinomiais, suas derivadas parciais existem e são contínuas. Logo, pelo Teorema 8, o problema possui uma única solução num intervalo aberto contendo $t = 0$. Pelo Teorema 10, essa solução pode ser estendida, de forma única, a um intervalo maximal (a, b) . Aplicando o método do fator integrante à primeira e à segunda equação de (12), e integrando a terceira, obtemos

$$S(t) = S_0 e^{-\beta \int_0^t I(\tau) d\tau}, \quad I(t) = I_0 e^{\int_0^t [\beta S(\tau) - \gamma] d\tau}, \quad R(t) = R_0 + \gamma \int_0^t I(\tau) d\tau \quad (19)$$

para todo $t \in (a, b)$. Portanto, S , I e R são todas não negativas. Diante da não negatividade, a igualdade (14) implica que $S, I, R \leq N$ e, portanto,

$$\|(S(t), I(t), R(t))\| = \sqrt{S(t)^2 + I(t)^2 + R(t)^2} \leq \sqrt{N^2 + N^2 + N^2} = N\sqrt{3}, \quad \forall t \in (a, b).$$

Isso implica que $\|(S(t), I(t), R(t))\|$ não tem limite infinito quando $t \rightarrow a^+$ nem quando $t \rightarrow b^-$. Portanto, novamente pelo Teorema 10, temos $a = -\infty$ e $b = \infty$. Isso mostra que o problema (12)-(13) possui uma única solução (S, I, R) definida em $(a, b) = (-\infty, \infty)$ e que S, I e R são todas não negativas nesse intervalo. Restringindo essa solução ao intervalo $[0, \infty)$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Agora, sabendo que o problema (12)-(13) possui uma única solução definida para todo $t \geq 0$, faz sentido indagar como é o seu comportamento assintótico. Note que:

- Se $I_0 = 0$, então as igualdades em (19) prontamente implicam que as três funções permanecem constantes: $I(t) = 0$, $S(t) = S_0$ e $R(t) = R_0$ para todo $t \geq 0$.
- Se $S_0 = 0$, então as igualdades em (19) prontamente implicam que o sistema pode ser resolvido explicitamente: $S(t) = 0$, $I(t) = I_0 e^{-\gamma t}$ e $R(t) = R_0 - I_0(e^{-\gamma t} - 1)$.

Portanto, no que segue vamos apenas considerar o caso não trivial (e biologicamente interessante) em que $S_0 > 0$ e $I_0 > 0$. Nessa situação, o comportamento de I é descrito por um importante resultado chamado de Teorema do Limiar Epidêmico. Para demonstrá-lo, vamos precisar de duas proposições auxiliares que apresentamos a seguir.

Proposição 13 Se $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona limitada, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existe e é finito.

Demonstração. Ver Teorema 3.7 em [14]. $\square$

Proposição 14 Se $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) + f'(t)] = L \in \mathbb{R}$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = 0$. Em particular, se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t)$ existem e são finitos, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) = 0$.

Demonstração. Ver [15]. $\square$

Teorema 15 (Teorema do Limiar Epidêmico) Seja (S, I, R) a solução do problema (12)-(13), dada pelo Teorema 12, com dados iniciais $S_0 > 0$ e $I_0 > 0$.

(a) Se $\mathcal{R}_e \leq 1$, então $I(t)$ é estritamente decrescente e $I(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

(b) Se $\mathcal{R}_e > 1$, então $I(t)$ cresce estritamente até atingir o valor máximo

$$I_{\max} = \frac{\gamma}{\beta} \left[\ln \left(\frac{1}{\mathcal{R}_e} \right) - 1 \right] + S_0 + I_0$$

e, a partir disso, $I(t)$ decresce estritamente e $I(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Pela primeira e última equações de (12), e por (18), S e R são monótonas. Além disso, elas também são limitadas por (14) e (18). Daí, pela Proposição 13, existem e são finitos os seguintes limites:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_{\infty}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = R_{\infty}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = N - S_{\infty} - R_{\infty} = I_{\infty}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [S(t) + I(t)] = S_{\infty} + I_{\infty}. \quad (20)$$

Somando as duas primeiras equações de (12), segue que

$$(S + I)' = -\gamma I. \quad (21)$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [S(t) + I(t)]' = \lim_{t \rightarrow \infty} [-\gamma I(t)] = -\gamma I_{\infty}. \quad (22)$$

Em vista de (20) e (22), segue da Proposição 14 que $\lim_{t \rightarrow \infty} [S(t) + I(t)]' = 0$ e, portanto, $I_{\infty} = 0$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0. \quad (23)$$

Afirmção 1: S é estritamente decrescente.

Prova da Afirmção 1: Como $S_0 > 0$ e $I_0 > 0$ (por hipótese), segue de (19) que

$$S > 0 \quad \text{e} \quad I > 0. \quad (24)$$

Daí, pela primeira equação de (12), $S' < 0$. $\square$

(a) Suponha $\mathcal{R}_e \leq 1$. Pela Afirmção 1, segue da segunda equação de (12) que, para todo $t > 0$, $I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) < \beta S_0 I(t) - \gamma I(t) = \gamma(\mathcal{R}_e - 1)I(t) \leq 0$. Isso mostra que I é estritamente decrescente – o que, em conjunto com (23), prova o item (a).

(b) Suponha $\mathcal{R}_e > 1$.

Afirmção 2: Existe $t^* > 0$ tal que $I'(t^*) = 0$.

Prova da Afirmção 2: Pela segunda equação de (12), temos

$$I'(0) = \beta S_0 I_0 - \gamma I_0 = \gamma I_0 (\mathcal{R}_e - 1) > 0. \quad (25)$$

Suponha que $I'(t) > 0$ para todo $t \geq 0$. Então, I é estritamente crescente. Daí, $I(t) > I(0) = I_0$ para todo $t > 0$. Assim, por (23), $0 = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) \geq I_0$. ABSURDO, pois contraria a hipótese

$I_0 > 0$. Portanto, existe $\tilde{t} > 0$ tal que $I'(\tilde{t}) \leq 0$. Se $I'(\tilde{t}) = 0$, o resultado vale com $t^* = \tilde{t}$. Se $I'(\tilde{t}) < 0$, o ponto t^* existe pelo Teorema do Valor Intermediário – que pode ser aplicado a I' porque, como S e I são contínuas (pois são deriváveis), segue da segunda equação de (12) que I' também é contínua. $\square$

Afirmção 3: O ponto t^* dado pela Afirmção 2 é único.

Prova da Afirmção 3: Pela segunda equação de (12), temos $(\beta S(t^*) - \gamma)I(t^*) = 0$, pois $I'(t^*) = 0$. Daí, por (24), $\beta S(t^*) - \gamma = 0$, ou seja,

$$S(t^*) = \frac{\gamma}{\beta}. \quad (26)$$

Suponha que exista $t_1 > 0$ tal que $t_1 \neq t^*$ e $I'(t_1) = 0$. Um argumento inteiramente análogo ao que foi aplicado a t^* mostra que também temos $S(t_1) = \frac{\gamma}{\beta}$. Assim, $S(t_1) = S(t^*)$. ABSURDO, pois contraria a Afirmção 1. $\square$

Afirmção 4: I' não muda de sinal em $[0, t^*)$.

Prova da Afirmção 4: Pelo Teorema do Valor Intermediário aplicado a I' concluímos que, se I' muda de sinal em $[0, t^*)$, então existe $t_1 \in (0, t^*)$ tal que $I'(t_1) = 0$. ABSURDO, pois contraria a Afirmção 3.

Em vista de (25), resulta da Afirmção 4 que $I'(t) > 0$ para todo $t \in [0, t^*)$. Pela Afirmção 1 e por (26) vemos que, para todo $t > t^*$, $S(t) < S(t^*) = \frac{\gamma}{\beta}$. Assim, novamente pela segunda equação de (12) e por (24), $I'(t) = (\beta S(t) - \gamma)I(t) < 0$ para todo $t > t^*$. Isso mostra que I é estritamente crescente em $[0, t^*)$ e estritamente decrescente em (t^*, ∞) . Portanto, I possui um máximo absoluto

$$I_{\max} = I(t^*). \quad (27)$$

Essas conclusões, em conjunto com (23), provam parcialmente o item (b). Resta apenas estabelecer o valor de $I_{\max}$. Para isso, realizamos o seguinte cálculo, válido para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} S(t) + I(t) - S_0 - I_0 &= \int_0^t [S(\tau) + I(\tau)]' d\tau \quad (\text{pelo TFC}) \\ &= -\gamma \int_0^t I(\tau) d\tau \quad (\text{por (21)}) \\ &= \frac{\gamma}{\beta} \int_0^t \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} d\tau \quad (\text{por (12) e (24)}) \\ &= \frac{\gamma}{\beta} \int_0^t [\ln S(\tau)]' d\tau \quad (\text{por (24)}) \\ &= \frac{\gamma}{\beta} [\ln S(t) - \ln S_0] \quad (\text{pelo TFC}) \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$I(t) = \frac{\gamma}{\beta} \ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) - S(t) + S_0 + I_0, \quad \forall t \geq 0.$$

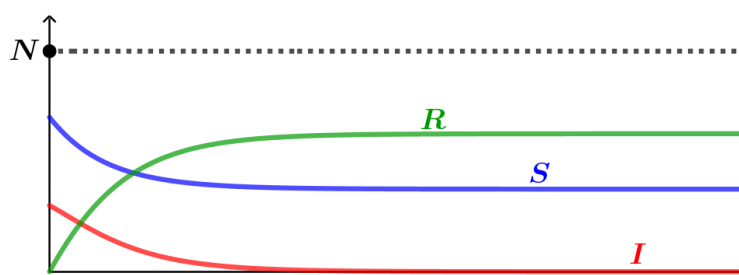
Em particular, calculando no ponto t^* , obtemos

$$I_{\max} \stackrel{(27)}{=} I(t^*) \stackrel{(26)}{=} \frac{\gamma}{\beta} \ln \left(\frac{\gamma}{\beta S_0} \right) - \frac{\gamma}{\beta} + S_0 + I_0 \stackrel{(15)}{=} \frac{\gamma}{\beta} \left[\ln \left(\frac{1}{\mathcal{R}_e} \right) - 1 \right] + S_0 + I_0.$$

□

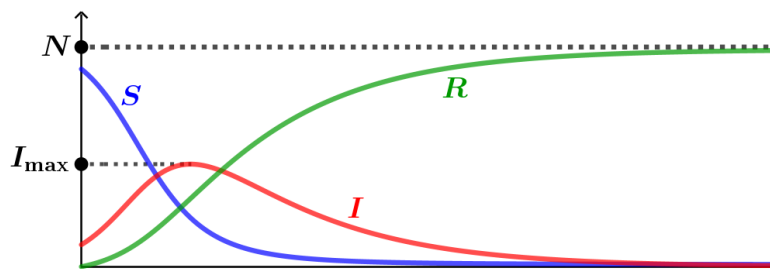
Mesmo não possuindo formas explícitas para S , I e R , ainda é possível traçar seus gráficos numericamente (por exemplo, por meio do GeoGebra com o comando *ResolverEDONumericamente*(*<Lista de Derivadas>*, *<Abscissa Inicial>*, *<Lista de Ordenadas Iniciais>*, *<Abscissa Final>*)). A Figura 6 e a Figura 7 ilustram, respectivamente, os comportamentos característicos dos itens (a) e (b) do Teorema 15 (veja as observações 2 e 5).

Figura 6: Gráficos da solução (S, I, R) do modelo (12)-(13) gerado com $N = 1$; $S_0 = 0,7$; $I_0 = 0,3$; $R_0 = 0$; $\beta = 6$; $\gamma = 6$. Nesse caso, $\mathcal{R}_e = 0,7 < 1$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 7: Gráficos da solução (S, I, R) do modelo (12)-(13) gerado com $N = 1$; $S_0 = 0,9$; $I_0 = 0,1$; $R_0 = 0$; $\beta = 9$; $\gamma = 2$. Nesse caso, $\mathcal{R}_e = 4,05 > 1$.



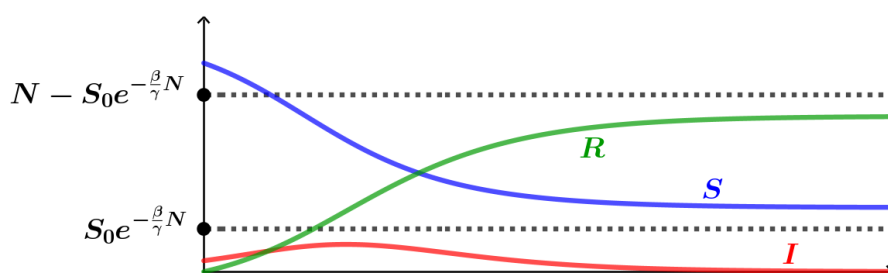
Fonte: Elaborada pelos autores.

Embora a última figura sugira que $S(t) \rightarrow 0$ e $R(t) \rightarrow N$ quando $t \rightarrow \infty$, isso não ocorre. De fato, substituindo a terceira equação de (12) na primeira, obtemos $S' = -\frac{\beta}{\gamma} R' S$. Pelo método do fator integrante,

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} \int_0^t R'(\tau) d\tau} = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} [R(t) - R_0]} \geq S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R(t)} \geq S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} N} \quad (28)$$

e, consequentemente, $R(t) = N - I(t) - S(t) \leq N - S(t) \leq N - S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} N}$. Em particular, no caso da Figura 7, $S(t) > 0,009$ e $R(t) < 0,991$ para todo $t \geq 0$. A estimativa (28) reflete o seguinte fato: “A epidemia termina pela falta de novos indivíduos infectados, e não pela falta de indivíduos suscetíveis” [12, p. 10, tradução nossa]. A Figura 8 ilustra um caso em que essa propriedade é melhor visualizada.

Figura 8: Gráficos da solução (S, I, R) do modelo (12)-(13) gerado com $N = 1$; $S_0 = 0,95$; $I_0 = 0,05$; $R_0 = 0$; $\beta = 7,5$; $\gamma = 4$. Nesse caso, $S(t) \geq 0,16$ e $R(t) \leq 0,84$ para todo $t \geq 0$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

4 O modelo da toxoplasmose

Nesta seção, faremos uma breve apresentação de um modelo de transmissão de toxoplasmose em gatos, baseada em [2]. Nessa apresentação, exemplificaremos o uso de uma importante ferramenta que nos permite obter uma visão geral sobre o comportamento do modelo de modo relativamente simples: a experimentação numérica.

4.1 Descrição do modelo

O modelo que vamos estudar considera que há quatro compartimentos, sendo um ambiental e os outros três dividindo a população de gatos:

- **Suscetíveis (S):** gatos que ainda não foram infectados e estão vulneráveis à infecção.
- **Infectados de forma aguda (I):** gatos que foram infectados e estão ativamente carregando o parasita no estágio inicial da doença, podendo contribuir de forma mais intensa para sua transmissão.
- **Cronicamente infectados (C):** gatos que passaram para um estágio de infecção crônica, onde a carga parasitária é reduzida e a transmissão pode ser menor ou inexistente.
- **Ambiente (E):** compartimento responsável por armazenar os parasitas que causam a contaminação dos gatos.

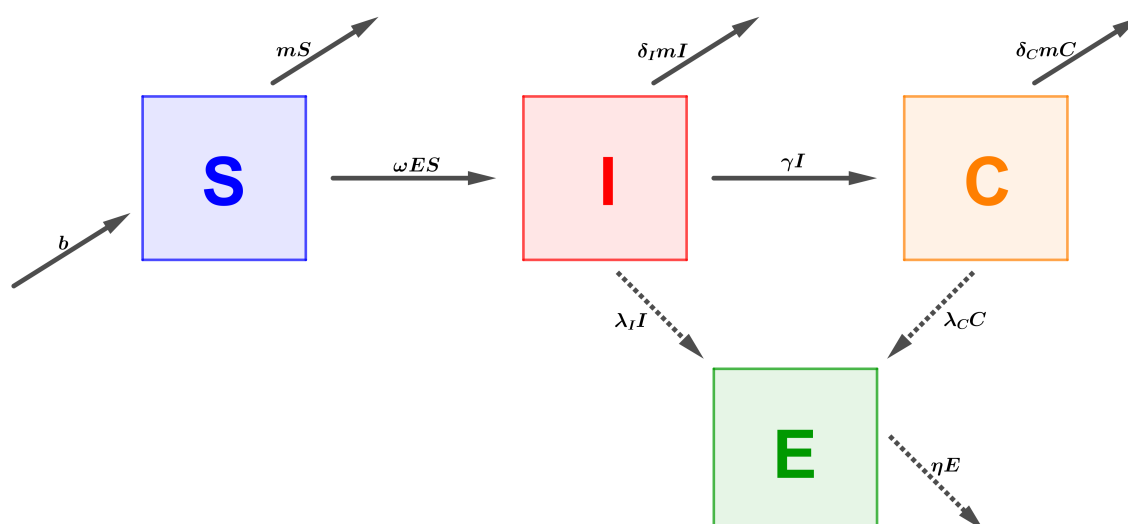
Representando por $S = S(t)$, $I = I(t)$, $C = C(t)$ e $E = E(t)$ a quantidade de elementos em cada compartimento no instante $t \geq 0$, as entradas e saídas de cada compartimento são realizadas conforme as seguintes hipóteses:

- A taxa de nascimento é dada por uma função não negativa $b = b(t, S, C, I)$, com todos os gatos nascendo suscetíveis.
- A taxa de mortalidade em cada compartimento é proporcional às respectivas quantidades de indivíduos, podendo ser maior nos compartimentos infectados: mS para os suscetíveis, $\delta_I mI$ para os infectados agudos e $\delta_C mC$ para os cronicamente infectados, onde m , δ_I e δ_C são constantes positivas.

- Nos compartimentos de infectados, a taxa de liberação de oocistos no ambiente é proporcional às respectivas quantidades de indivíduos, podendo ser maior no compartimento dos infectados agudos: $\lambda_I I$ para os infectados agudos e $\lambda_C C$ para os cronicamente infectados, onde λ_I e λ_C são constantes positivas.
- Os suscetíveis se infectam a uma taxa proporcional ao produto ES , e evoluem de infectados agudos para cronicamente infectados a uma taxa proporcional a I , ou seja, passam de S para I a uma taxa ωES , e de I para C a uma taxa γI , onde ω e γ são constantes positivas.
- Os oocistos disponíveis no ambiente se degradam a uma taxa proporcional à quantidade existente, isto é, a uma taxa ηE , onde η é uma constante positiva.

A dinâmica descrita, bem mais complexa do que as dinâmicas dos modelos SIS e SIR, é ilustrada na Figura 9.

Figura 9: Dinâmica de transmissão no modelo da toxoplasmose.



Fonte: Elaborada pelos autores com base em [2, p. 174].

Matematicamente, essa dinâmica é modelada pelo sistema

$$\begin{cases} S' = b - \omega ES - mS \\ I' = \omega ES - \gamma I - \delta_I mI \\ C' = \gamma I - \delta_C mC \\ E' = \lambda_I I + \lambda_C C - \eta E \end{cases} \quad (29)$$

com condições iniciais

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0, \quad C(0) = C_0 \geq 0, \quad E(0) = E_0 \geq 0. \quad (30)$$

4.2 Experimentação numérica

No estudo do modelo SIR, começamos provando existência e unicidade de solução. Aqui, com o intuito de exemplificar o uso da experimentação numérica, o enfoque será diferente: partindo do

princípio de que uma única solução existe (veja a Seção 4.3), nos ocuparemos em plotar o gráfico da solução numérica do modelo de modo a visualizar o comportamento do mesmo. Para modelos novos nunca antes estudados, esse procedimento pode ser uma etapa preliminar importante nos dando uma ideia do que é que podemos buscar provar formalmente no escopo da análise qualitativa.

4.2.1 Código e parâmetros utilizados

Para implementar numericamente o modelo (29)-(30), utilizamos a linguagem R com base em um exemplo adaptado de [2], que fornece os seguintes valores para os parâmetros do sistema:

$$\begin{aligned} \lambda_C = 0, \quad b = 60/52, \quad \omega = 0,046, \quad m = 0,2/52, \quad \gamma = 11/15, \\ \delta_I = 1,05, \quad \delta_C = 1,0005, \quad \eta = 4/52, \quad \lambda_I = 0,07/11, \\ S_0 = 495, \quad I_0 = 5, \quad C_0 = 0, \quad E_0 = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

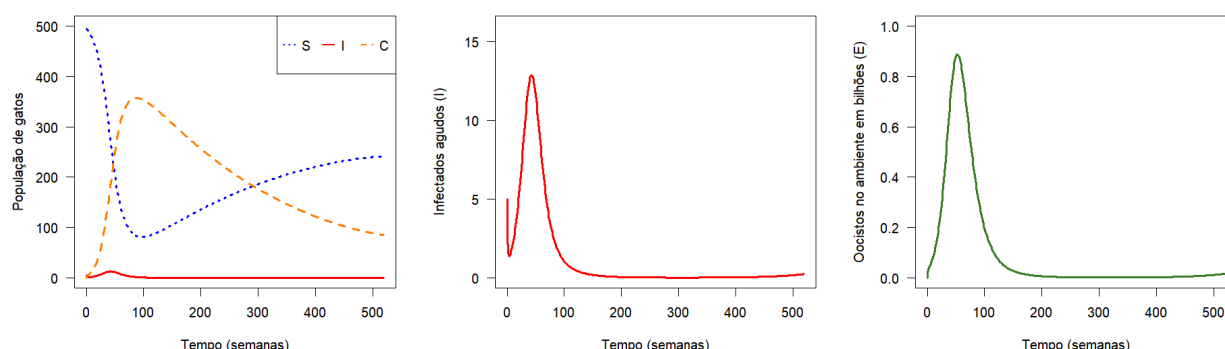
A linguagem R é uma linguagem de programação de software livre que pode ser executada gratuitamente em diversos sistemas operacionais e oferece uma grande variedade de ferramentas estatísticas e gráficas. As simulações foram realizadas com base nos valores (31) por meio da função `lsoda`, um resolvidor de sistemas de equações diferenciais fornecido pelo pacote `deSolve` (para detalhes, ver [16]). O código completo do primeiro gráfico apresentado na Figura 11 pode ser visto no Apêndice A. Os códigos dos outros gráficos são similares.

Observação 16 *Devido a maior complexidade do modelo SICE em relação aos modelos SIS e SIR estudados nas seções precedentes, o Geogebra não fornece bons resultados na plotagem dos gráficos. Por essa razão, é necessário fazer uso de ferramentas mais robustas como, por exemplo, a linguagem R.*

4.2.2 Experimentações com $\lambda_C = 0$ e b constante

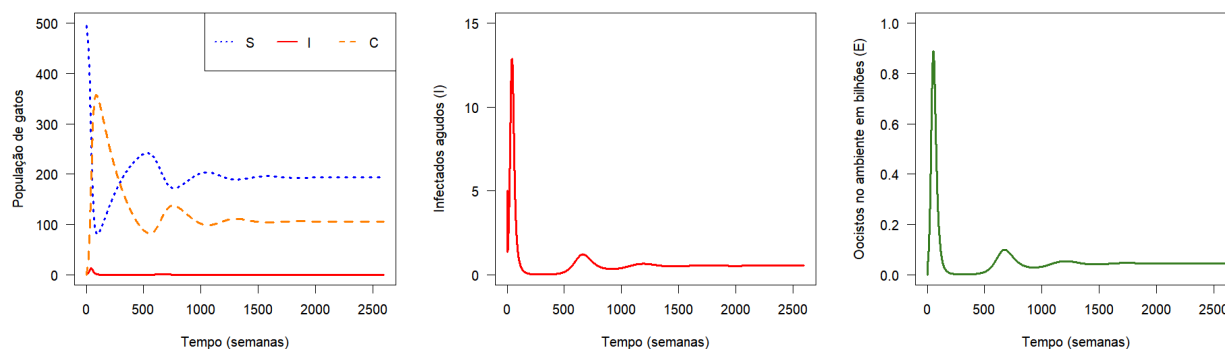
Inicialmente, realizamos a simulação do modelo original apresentado em [2]. Os resultados são mostrados nas Figuras 10 e 11.

Figura 10: Gráficos de S , I , C e E gerados para 500 semanas com os parâmetros dados em (31).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 11: Gráficos de S , I , C e E gerados para 2500 semanas com os parâmetros dados em (31).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Note que, para a população de suscetíveis (S), temos uma população inicial de 495 gatos que cai drasticamente nas primeiras 100 semanas. Esse declínio acentuado pode ser causado pela infecção ambiental via oocistos ($\omega = 0,046$) que age sobre a grande população suscetível. A taxa de nascimento constante $b = 60/52$ faz com que a população de suscetíveis seja constantemente reabastecida, levando a oscilações. A longo prazo, a curva estabiliza em torno de 200 indivíduos.

A população de infectados agudos (I) apresenta um pico nítido nas primeiras 50 semanas, em torno de 13 gatos. A rápida queda dessa curva pode ser explicada por dois fatores: a alta taxa de progressão para cronicidade ($\gamma = 11/15$) e pela mortalidade aumentada dos agudos ($\delta_I = 1,05$), que reduz sua permanência. Mesmo com nascimento constante, a combinação das taxas γ e δ_I altas impedem o acúmulo de infectados agudos. O pico inicial deve-se ao contato dos suscetíveis com o ambiente contaminado devido à eliminação de oocistos pelos infectados agudos.

A população cronicamente infectada (C) sobe gradualmente após o surto de infectados agudos, atingindo um primeiro pico, sofrendo uma queda e atingindo um segundo pico menor, após o qual a curva passa a oscilar levemente até se estabilizar por volta de 100 indivíduos. Essa população cresce a partir da conversão de infectados agudos via $\gamma = 11/15$ e é mantida viva por uma taxa de mortalidade quase natural ($\delta_C = 1,0005$), apenas ligeiramente maior que a mortalidade base. A progressão eficiente de infectados agudos para crônicos e a quase ausência de mortalidade extra fazem com que a população de crônicos se sustente no longo prazo.

Para os oocistos (E) acontece um surto dentro das primeiras 100 semanas, em sincronia com o pico de gatos infectados agudos – que são os únicos responsáveis pela liberação de oocistos (pois $\lambda_C = 0$). A produção inicial de oocistos é intensa, pois muitos gatos se contaminam, tornam-se infectados agudos e liberam oocistos. Esse declínio, após o pico, pode ser causado pela taxa $\eta = 4/52$ que representa um decaimento contínuo e significativo dos oocistos. Como a população de infectados agudos despenca rapidamente após o pico, a fonte de oocistos também diminui. Assim, o compartimento ambiental E entra em declínio, sendo drenado mais rapidamente do que é reabastecido.

Podemos notar repetições de pequenos picos entre as semanas 500 e 1500. Estes episódios se devem à constante introdução de novos suscetíveis pela taxa de nascimento $b = 60/52$ que ocasionalmente entram em contato com os oocistos residuais, gerando novos casos agudos e pequenas liberações adicionais. A infecção, então, não some totalmente, mas fica em um regime de baixa circulação ambiental.

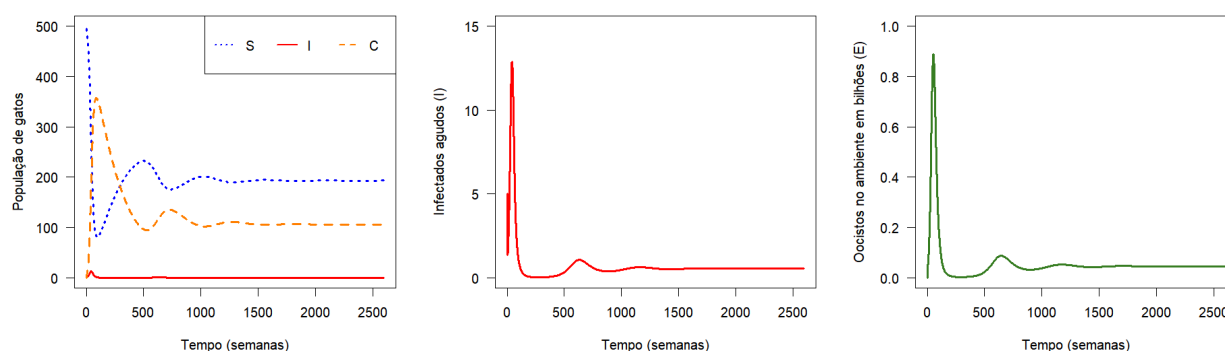
No que segue, passaremos a analisar o comportamento do modelo com base em alterações nas taxas λ_C e b , com foco em dois cenários sugeridos como temas de investigação em [2]: taxa de

liberação de oocistos não nula por parte dos gatos cronicamente infectados e taxa de nascimento não constante.

4.2.3 Experimentações com $\lambda_C \neq 0$

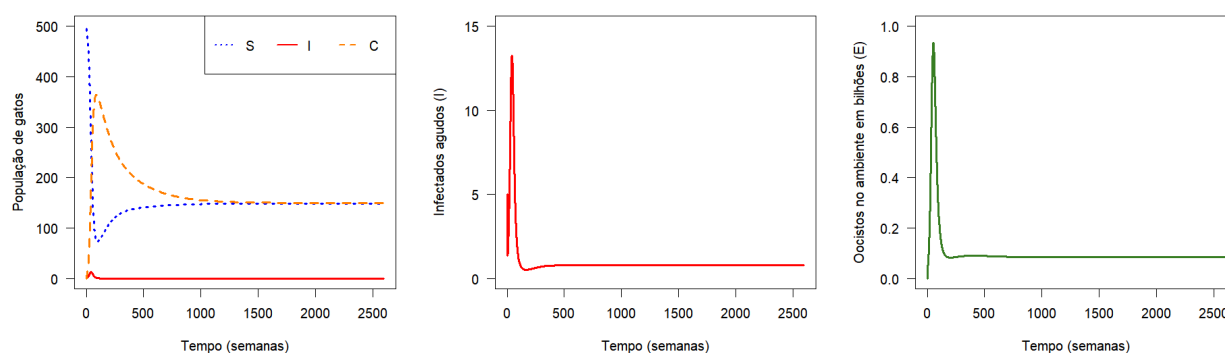
Nesta seção vamos simular valores diferentes de zero para a taxa λ_C e analisar as possíveis mudanças do gráfico. Utilizaremos os mesmos parâmetros anteriores, apenas mudando o valor de λ_C .

Figura 12: Gráficos de S , I , C e E para 2500 semanas gerados com $\lambda_C = 10^{-7}$ e demais parâmetros dados em (31).



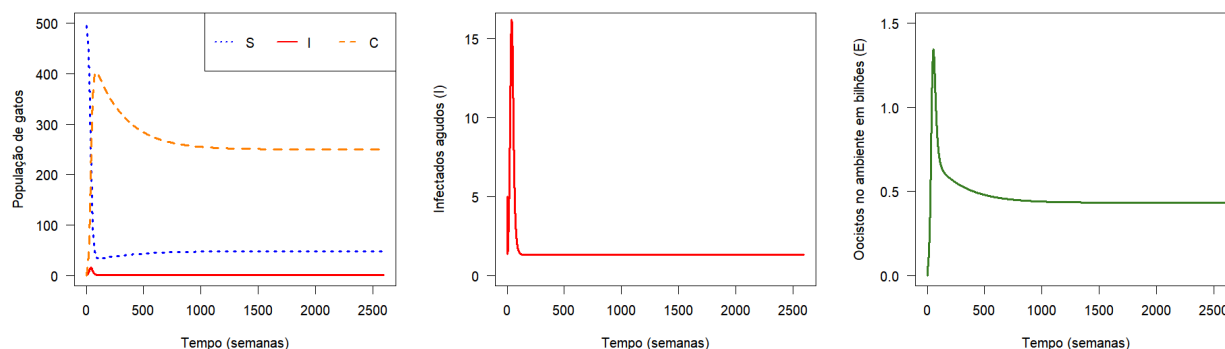
Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 13: Gráficos de S , I , C e E para 2500 semanas gerados com $\lambda_C = 10^{-5}$ e demais parâmetros dados em (31).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 14: Gráficos de S , I , C e E para 2500 semanas gerados com $\lambda_C = 10^{-4}$ e demais parâmetros dados em (31).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Inicialmente nota-se que uma taxa λ_C não nula, porém bem pequena, aparenta não afetar o comportamento qualitativo da solução (compare a Figura 11 com a Figura 12). Entretanto, uma taxa $\lambda_C \geq 10^{-5}$ começa a apresentar algumas mudanças no gráfico. Especificamente, na estabilização alcançada a longo prazo, a população de cronicamente infectados pode equiparar-se à população de suscetíveis (ver Figura 13), ou até mesmo superá-la (ver Figura 14). Isso pode se dar ao fato de que os gatos cronicamente infectados vão se tornando uma fonte significativa de oocistos no ambiente, aumentando substancialmente a carga parasitária. Neste cenário, a fase crônica da infecção contribui quase tanto quanto a fase aguda para a disseminação de oocistos, prolongando a presença do parasita no ambiente e aumentando o risco de infecção para gatos suscetíveis.

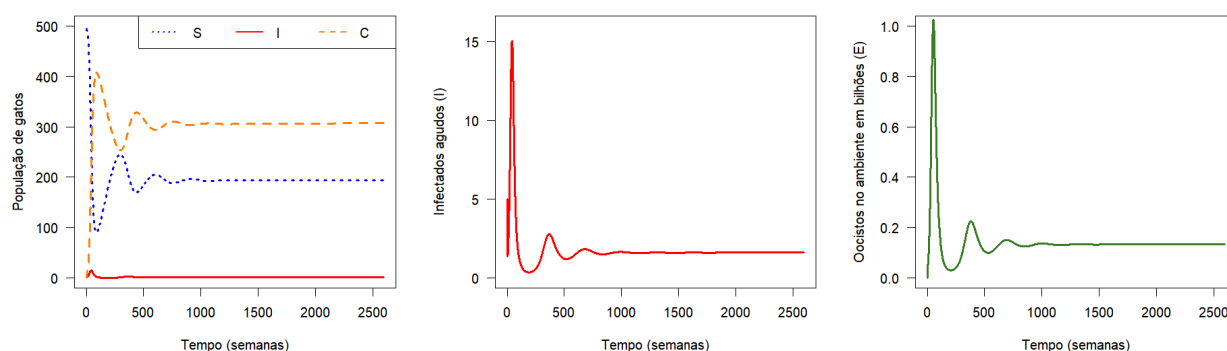
No geral, quando λ_C é muito próximo de zero, o comportamento do sistema é praticamente o mesmo do caso sem crônicos contaminantes. E quando λ_C cresce algumas ordens de magnitude, os crônicos deixam de ser irrelevantes e mudam a dinâmica da infecção. Esse é um típico exemplo de como, em modelos epidemiológicos, pequenas taxas aplicadas a populações grandes e persistentes podem gerar efeitos macroscópicos notáveis.

4.2.4 Experimentações com b variável

No modelo original (ver Figura 11), a taxa de nascimento de gatos era considerada constante, independente do tamanho da população. Agora, vamos analisar uma modificação na qual a taxa de nascimento passa a depender proporcionalmente do número $S + I + C$ de indivíduos vivos, ou seja, adotamos uma taxa de nascimento do tipo $b = B(S + I + C)$, onde B é uma constante positiva. Nessa formulação, a população passa a ter um crescimento condicionado ao tamanho da própria população – o que é comum em populações animais.

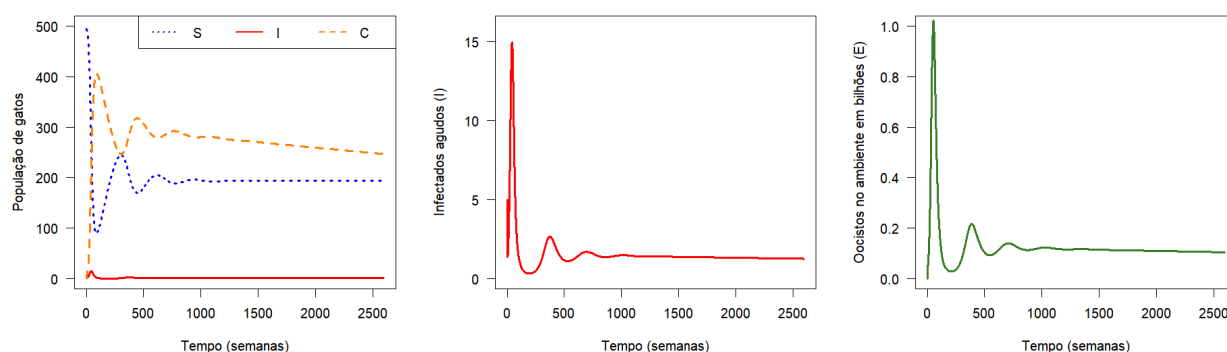
Para a constante B , analisaremos valores próximos da taxa de mortalidade natural $m = 0,2/52 \approx 0,00385$ de modo a observar os efeitos de mudanças sutis sobre o comportamento do sistema (ver Figura 15, Figura 16 e Figura 17).

Figura 15: Gráficos de S , I , C e E para 2500 semanas gerados com $b = B(S + I + C)$, onde $B = 0,00385$, e demais parâmetros dados em (31).



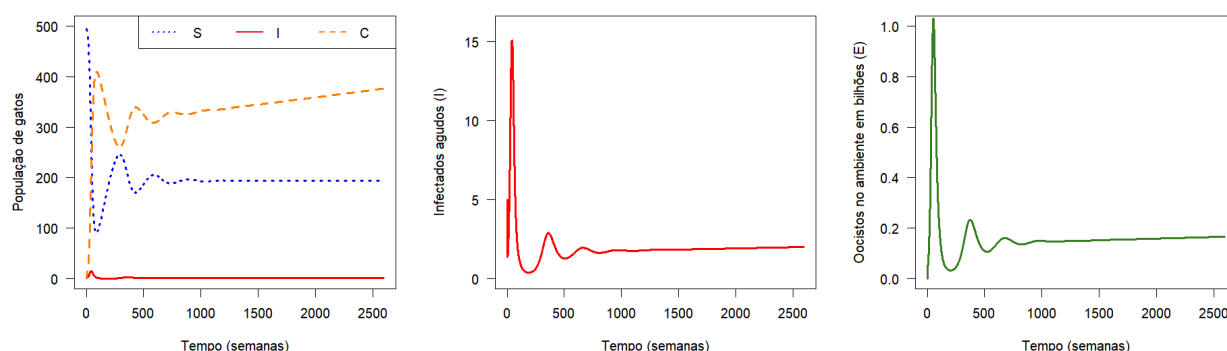
Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 16: Gráficos de S , I , C e E gerados para 2500 semanas com $b = B(S + I + C)$, onde $B = 0,0038$, e demais parâmetros dados em (31).



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 17: Gráficos de S , I , C e E gerados para 2500 semanas com $b = B(S + I + C)$, onde $B = 0,0039$, e demais parâmetros dados em (31).



Fonte: Elaborada pelos autores.

A diferença mais marcante entre os gráficos reside precisamente no comportamento distinto das populações de gatos cronicamente infectados. No cenário da Figura 15 ($B = 0,00385$), observamos que os cronicamente infectados atingem um patamar de equilíbrio. Já o cenário da Figura 16

($B = 0,0038$) mostra que uma redução mínima no valor de B leva ao declínio da população de cronicamente infectados. Uma possível interpretação é que a menor taxa de nascimento resulta em uma reposição mais lenta de suscetíveis. Com menos suscetíveis disponíveis, o número de novas infecções agudas, que poderiam eventualmente se tornar crônicas, diminui. Assim, os cronicamente infectados existentes vão morrendo naturalmente, mas não são suficientemente repostos por novos casos – levando ao declínio observado. Finalmente, no cenário da Figura 17 ($B = 0,00389$), verificamos o comportamento oposto: uma taxa de nascimento levemente maior é suficiente para gerar o crescimento a longo prazo da população de cronicamente infectados.

Estes diferentes comportamentos mostram que uma pequena redução na taxa de natalidade (talvez devido a medidas de controle populacional ou mudanças ambientais) pode ser suficiente para levar a presença do parasita na população de um estado de persistência ou crescimento para um estado de declínio. Este resultado tem importantes implicações para estratégias de controle de doenças em populações animais. Ele sugere que intervenções que afetem, mesmo que minimamente, a taxa de reposição de suscetíveis podem ter um impacto relevante na dinâmica da doença.

4.3 Existência e unicidade para o modelo da toxoplasmose

Para gerar gráficos que representem a evolução temporal das variáveis de um modelo é essencial assegurar que o sistema de equações diferenciais em questão, complementado com as condições iniciais apropriadas, admita uma única solução. Afinal, se não houver solução, ou se ela não for única, todo o esforço de análise perde o sentido. O fato de que o modelo SICE que consideramos na seção precedente possui uma única solução definida para todo $t \geq 0$ pode ser provado com um método análogo ao que foi aplicado para o modelo SIR, que é típico para sistemas epidemiológicos: inicialmente, pelo Teorema de Picard, obtemos existência local; em seguida, provamos que as componentes da solução são todas não negativas; utilizando a não negatividade, provamos que a solução é limitada (pelo menos em intervalos limitados); finalmente, devido à limitação da solução, o Teorema de Extensão implica que o domínio da solução pode ser estendido até ∞ . Entretanto, devido à maior complexidade de suas equações, suas variáveis não podem ser expressas diretamente na forma exponencial como em (19). Assim, para obtermos a não negatividade das variáveis do modelo SICE, é necessário seguir um caminho diferente. Nesse contexto, o resultado seguinte (ou alguma de suas versões mais gerais) desempenha um papel central. Para enunciá-lo, vamos escrever $f = (f_1, \dots, f_n)$ e $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Teorema 17 (Teorema da Invariância) *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Nas hipóteses do Teorema 8, temos $u(t) \in M$ para todo $t \in I$ desde que $(u_{10}, \dots, u_{n0}) \in M$ e*

$$\langle \mathbf{n}(z), f(z) \rangle \leq 0, \quad \forall z \in \partial M, \quad (32)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$, ∂M é a fronteira de M e $\mathbf{n}(z)$ é o vetor exterior normal a M em z .

Demonstração. Veja o Teorema XVI da página 118 e o Remark 1 da página 119 de [17]. Note que, nas hipóteses do Teorema 8, a condição de Lipschitz é automaticamente satisfeita. $\square$

O Teorema da Invariância estabelece que, sob condições apropriadas: se o dado inicial está em M , então a solução permanece em M . Diante disso, estamos em condições de provar o resultado desejado.

Teorema 18 (Existência e unicidade para o modelo SICE) *Supondo que todos os coeficientes sejam constantes não negativas, o problema (29)-(30) possui uma única solução (S, I, C, E) no intervalo $[0, \infty)$. Além disso,*

$$S(t) \geq 0, \quad I(t) \geq 0, \quad C(t) \geq 0, \quad E(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Como na prova do Teorema 12, em vista do Teorema 8 e do Teorema 10, concluímos que o problema possui uma única solução definida num intervalo maximal (a, β) contendo $t = 0$. (Usaremos a notação β porque b é um dos parâmetros do modelo.)

Não negatividade: Defina

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ e } x_4 \geq 0\}.$$

Resulta de (30) que $(S_0, I_0, C_0, E_0) \in M$. Note que $\partial M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$, onde

$$M_1 = \{(0, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ e } x_4 \geq 0\},$$

$$M_2 = \{(x_1, 0, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ e } x_4 \geq 0\},$$

$$M_3 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } x_4 \geq 0\},$$

$$M_4 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } x_3 \geq 0\}.$$

Tome $z = (S, I, C, E) \in \partial M$. Então, em vista de (29), o termo $f(z)$ de (32) equivale a $(f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z))$ com $f_1(z) = f_1(S, I, C, E) = b - \omega ES - mS$, $f_2(z) = f_2(S, I, C, E) = \omega ES - \gamma I - \delta_I mI$, $f_3(z) = f_3(S, I, C, E) = \gamma I - \delta_C mC$, $f_4(z) = f_4(S, I, C, E) = \lambda_I I + \lambda_C C - \eta E$. Assim:

- Se $z \in M_1$, então $\langle \mathbf{n}(z), f(z) \rangle = \langle (-1, 0, 0, 0), f(0, I, C, E) \rangle = -b \leq 0$.
- Se $z \in M_2$, então $\langle \mathbf{n}(z), f(z) \rangle = \langle (0, -1, 0, 0), f(S, 0, C, E) \rangle = -\omega ES \leq 0$.
- Se $z \in M_3$, então $\langle \mathbf{n}(z), f(z) \rangle = \langle (0, 0, -1, 0), f(S, I, 0, E) \rangle = -\gamma I \leq 0$.
- Se $z \in M_4$, então $\langle \mathbf{n}(z), f(z) \rangle = \langle (0, 0, 0, -1), f(S, I, C, 0) \rangle = -(\gamma_I I + \lambda_C C) \leq 0$.

Isso mostra que a condição (32) é satisfeita. Portanto, pelo Teorema 17,

$$(S(t), I(t), C(t), E(t)) \in M, \quad \forall t \in (a, \beta),$$

ou seja,

$$S(t) \geq 0, \quad I(t) \geq 0, \quad C(t) \geq 0, \quad E(t) \geq 0, \quad \forall t \in (a, \beta). \quad (33)$$

Limitação em intervalos limitados: Escreva $V(t) = S(t) + I(t) + C(t) + E(t)$ e $V_0 = V(0)$. Resulta de (29) que

$$\begin{aligned} V' &= b - mS - \delta_I mI - \delta_C mC + \lambda_I I + \lambda_C C - \eta E \\ &\leq b + \lambda_I I + \lambda_C C \leq b + S + \lambda_I I + \lambda_C C + E \leq b + kV, \end{aligned}$$

sendo $k = \max\{\lambda_I, \lambda_C, 1\} > 0$, ou seja, $V' - kV \leq b$. Multiplicando por e^{-kt} e integrando de 0 a $t \in [0, \beta)$ segue que

$$V(t)e^{-kt} - V_0 \leq -\frac{b}{k}e^{-kt} + \frac{b}{k},$$

ou seja,

$$V(t) \leq \left(V_0 + \frac{b}{k}\right) e^{kt} - \frac{b}{k}.$$

Portanto, para qualquer intervalo limitado $[0, T) \subset [0, \beta)$, tem-se

$$S(t) + I(t) + C(t) + E(t) = V(t) \leq \left(V_0 + \frac{b}{k}\right) e^{kT} - \frac{b}{k}, \quad \forall t \in [0, T).$$

Consequentemente, em vista de (33),

$$\begin{aligned} \|(S(t), I(t), C(t), E(t))\| &= \sqrt{S(t)^2 + I(t)^2 + C(t)^2 + E(t)^2} \\ &\leq \sqrt{4V(t)^2} = 2V(t) \leq 2\left(V_0 + \frac{b}{k}\right) e^{kT} - 2\frac{b}{k} < \infty, \quad \forall t \in [0, T). \end{aligned}$$

Extensão ao infinito: Suponha $\beta < \infty$. Então, aplicando a estimativa acima com $T = \beta$, obtemos

$$\|(S(t), I(t), C(t), E(t))\| \leq 2\left(V_0 + \frac{b}{k}\right) e^{k\beta} - 2\frac{b}{k} < \infty, \quad \forall t \in [0, \beta).$$

Isso mostra que o limite da norma com $t \rightarrow \beta^-$ não pode ser infinito. ABSURDO, pois contraria o Teorema de Extensão. Assim, concluímos que $b = \infty$. Portanto, o problema (29)-(30) possui uma única solução (S, I, C, E) definida em $(a, \beta) = (a, \infty)$ com S, I, C e E todas não negativas nesse intervalo. Restringindo essa solução ao intervalo $[0, \infty)$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Observação 19 Para a variante do modelo em que b constante é trocado por $b = B(S + I + C)$, considerada na Seção 4.2.4, um argumento análogo se aplica.

5 Considerações finais

Neste trabalho, fizemos uma breve introdução aos modelos compartimentais no contexto da transmissão de doenças infecciosas. Aumentando gradualmente a complexidade dos modelos estudados, novas ferramentas de análise foram sendo introduzidas. Nesse sentido, exploramos como a modelagem matemática, aliada a ferramentas teóricas e à experimentação numérica, pode ser utilizada para compreender o comportamento de epidemias e simular diferentes cenários de propagação de doenças. O estudo teórico realizado introduziu importantes técnicas de análise de equações diferenciais no que se refere a existência, unicidade, extensão e invariância de soluções. Por sua vez, o estudo numérico efetuado sugere direções para investigações futuras, tanto do ponto de vista biológico – para verificar se as taxas utilizadas nos modelos são realistas – quanto do ponto de vista matemático – com o objetivo de demonstrar rigorosamente os comportamentos observados nas simulações.

6 Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores anônimos pela leitura atenciosa e sugestões valiosas que ajudaram a melhorar a versão inicial do texto.

Referências

- [1] KELTING, E. *Toxoplasma gondii*: A mathematical model of its transfer between cats and the environment. **SIAM Undergraduate Research Online**, Philadelphia, v. 11, p. 270–284, 2018. Disponível em: <https://www.siam.org/media/ty1pinuo/1658.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2025.
- [2] BANNISH, B. E.; LAVERTY, S. M. Exploring modeling by programming: insights from numerical experimentation. In: HIGHLANDER, H. C.; CAPALDI, A.; EATON, C. D. (ed.). **An introduction to undergraduate research in computational and mathematical biology**: from birdsongs to viscosities. Switzerland: Birkhäuser, 2020. p. 155–215.
- [3] BRASIL. Ministério da Saúde. **Toxoplasmose**. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/t/toxoplasmose>. Acesso em: 27 jun. 2025.
- [4] VIANA, M.; ESPINAR, J. **Equações diferenciais**: uma abordagem de sistemas dinâmicos. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. Disponível em: <https://edoimpa.br>. Acesso em: 01 mai. 2025.
- [5] MARTCHEVA, M. **An introduction to mathematical epidemiology**. New York: Springer, 2015.
- [6] KISS, I. Z.; MILLER, J. C.; SIMON, P. L. **Mathematics of epidemics on networks**: from exact to approximate models. Switzerland: Springer, 2017.
- [7] NEWMAN, M. E. J. **Networks**: an introduction. New York: Oxford University Press, 2010.
- [8] ALLEN, L. J. S. An introduction to stochastic epidemic models. In: BRAUER, F.; DRIESSCHE, P.; WU, J. (ed.). **Mathematical epidemiology**. Berlin: Springer-Verlag, 2008. p. 81–130.
- [9] ZHANG, X. *et al.* Agent-based modeling of epidemics: approaches, applications, and future directions. **Technologies**, Basel, v. 13, n. 7, 2025. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2227-7080/13/7/272>. Acesso em: 12 mar. 2026.
- [10] LÓPEZ-FLORES, M. M. *et al.* **Equações diferenciais e modelos epidemiológicos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2021. *E-book*. Trabalho apresentado no Colóquio Brasileiro de Matemática, 33., 2021, Rio de Janeiro. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2022/01/33CBM08-eBook.pdf>. Acesso em: 29 abr. 2026.
- [11] SOUZA, G. F.; DE LIMA, P. R. Análise do modelo SIR na pandemia de covid-19 em Guarapuava-PR por meio do GeoGebra. **C.Q.D.–Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 22, n. 3, p. 56–72, dez. 2022. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/347/353>. Acesso em: 02 set. 2025.
- [12] WEISS, H. The sir model and the foundations of public health. **Materials Matemàtics**, Barcelona, v. 2013, n. 3, p. 1–17, 2013. Disponível em: <https://mat.uab.cat/~matmat/PDFv2013/v2013n03.pdf>. Acesso em: 02 set. 2025.
- [13] KAPLAN, W. **Ordinary differential equations**. Reading: Addison-Wesley, 1958.
- [14] PROTTER, M. H.; MORREY, C. B. **A first course in real analysis**. New York: Springer-Verlag, 1991.

- [15] LANDAU, M. D.; JONES, W. R. A Hardy old problem. **Mathematics Magazine**, Washington, v. 56, n. 4, p. 230–232, set. 1983.
- [16] SOETAERT, K.; PETZOLDT, T.; SETZER, R. W. Solving differential equations in R: package deSolve. **Journal of Statistical Software**, Innsbruck, v. 33, n. 9, p. 1–25, 2010. Disponível em: <https://www.jstatsoft.org/article/view/v033i09>. Acesso em: 13 mar. 2026.
- [17] WALTER, W. **Ordinary differential equations**. New York: Springer-Verlag, 1998.

A Código R utilizado nos gráficos do modelo SICE

O primeiro gráfico da Figura 11 foi construído a partir do código indicado abaixo, baseado no modelo fornecido por [2]. Os outros gráficos da Seção 4.2 foram construídos com base em códigos análogos.

```
library(deSolve)

ModeloSICE <- function(t, x, parametros) {
  with(as.list(c(parametros, x)), {
    ## Equações do modelo
    dS <- b - omega*E*S - m*S
    dI <- omega*E*S - gamma*I - delta_I*m*I
    dC <- gamma*I - delta_C*m*C
    dE <- lambda_I*I + lambda_C*C - eta*E
    list(c(dS, dI, dC, dE))
  })
}

#Parâmetros do modelo
parametros <- c(
  b = 60*(1/52),
  omega = 0.046,
  m = 0.2*(1/52),
  gamma = 11/15,
  delta_I = 1.05,
  delta_C = 1.0005,
  eta = 4*(1/52),
  lambda_I = (0.07/11),
  lambda_C = 0
)

#Condições Iniciais
cond_iniciais <- c(S = 495, I = 5, C = 0, E = 0)

#Tempo em semanas
tempo <- seq(0, 50*52, by = 1)

#Resultado
out <- lsoda(cond_iniciais, tempo, ModeloSICE, parametros)
```

```
out <- as.data.frame(out)

#Gráfico de S
plot(out$time, out$S, type='l', col='#0000FF', lty=3, ylim=c(0, 500),
      las=1, lwd=3, xlab='', ylab='')

#Gráfico de I
lines(out$time, out$I, col='#FF0000', lty=1, lwd=3)

#Gráfico de C
lines(out$time, out$C, col='#FF7F00', lty=2, lwd=3)

#Legenda
legend("topright", c('S', 'I', 'C'),
      lty=c(3, 1, 2), lwd=2, col=c('#0000FF', '#FF0000', '#FF7F00'),
      bg='white',horiz = TRUE,
      text.width = max(strwidth(c(' S', 'I', 'C')))) * 2
)
```