



**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 27, 2026
Artigo de Pesquisa

Francisco Hedyleno Coelho Bezerra
Instituto Federal de Educação, Ciência
e Tecnologia do Ceará (IFCE), Forta-
leza

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência
e Tecnologia do Ceará (IFCE), Forta-
leza

**Paula Maria Machado Cruz Cata-
rino**
Universidade de Trás-os-Montes e Alto
Douro, Vila Real, pccatarin@utad.pt

Eudes Antonio Costa
Universidade Federal do Tocantins
(UFT), Arraias

Relações recorrentes t-dimensionais dos números multifigurados quadrados-nonagonais

t-Dimensional Recurrence Relations of Square-Nonagonal
Multifigurate Numbers

Resumo

Este artigo investiga os números multifigurados quadrados-nonagonais, uma classe de números figurados que pertencem simultaneamente aos números figurados quadrados e nonagonais. Inicialmente, são apresentadas a fórmula de recorrência, a função geradora e a expressão do termo geral da sequência. Em seguida, estuda-se o processo de complexificação por meio da introdução de unidades imaginárias, o que permite generalizações para dimensões superiores. São discutidas as relações bidimensional, tridimensional e, por fim, t-dimensional, destacando como tais extensões ampliam as propriedades estruturais desses números e abrem perspectivas para o estudo de outras sequências de números multifigurados.

Palavras-chave: números multifigurados quadrados-nonagonais; relações recorrentes; complexificação de sequências numéricas.

Abstract

This article investigates square-nonagonal multifigurate numbers, a class of figurative numbers that belongs simultaneously to both square and nonagonal figurative numbers. Initially, the recurrence formula, the generating function, and the expression of the general term of the sequence are presented. Next, the process of complexification through the introduction of imaginary units is studied, which allows generalizations to higher dimensions. The two-dimensional, three-dimensional, and finally, t-dimensional relations are discussed, highlighting how such extensions expand the structural properties of these numbers and open perspectives for the study of other multifigurate number sequences.

Keywords: square-nonagonal multifigurate numbers; recurrent relations; complexification of numerical sequences.



1 Introdução

Os números figurados são uma classe de números inteiros que podem ser representados por pontos dispostos de forma equidistante, formando objetos geométricos. Esses objetos podem ser figuras poligonais na Geometria Plana ou sólidos no espaço. Exemplos clássicos incluem os números (poligonais) triangulares, quadrados, pentagonais, entre outros. De acordo com Emin (2023)[1], números multifigurados são números que podem ser simultaneamente diferentes números figurados. Por exemplo, o número 36 é multifigurado, pois é simultaneamente um número triangular e um número quadrado. Existem outros números multifigurados, por exemplo, os números quadrados-nonagonais, que serão estudados neste trabalho. De acordo com Deza e Deza (2012)[2], essa classe é representada pela seguinte sequência numérica

$$\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 1} = \{1, 9, 1089, 8281, 978121, 7436529, \dots\}.$$

Resultados preliminares sobre essa sequência, incluindo sua formulação por meio da equação de Pell generalizada, relações de recorrência e representações matriciais, foram estabelecidos em Bezerra *et al.* (2025)[3]. No presente trabalho, investigamos o processo de complexificação dessa sequência por meio da introdução de unidades imaginárias e sua generalização algébrica para dimensões superiores. Para isso, são propostas e analisadas as relações recorrentes bidimensionais, tridimensionais e t -dimensionais dos números multifigurados quadrados-nonagonais.

A pesquisa é motivada por estudos recentes que exploram a complexificação de sequências numéricas. Destacam-se, por exemplo, os trabalhos de Alves, Vieira e Catarino (2024)[4], que investigam os números triangulares-quadrados e triangulares-pentagonais, o de Costa, Catarino, Vasco e Alves (2025)[5] que estuda extensões t -dimensionais para a sequência dos números repunidade, sendo apresentadas algumas identidades dessa sequência na forma bidimensional. Outros exemplos incluem a análise da sequência de Narayana (Bezerra; Alves; Vieira, 2020)[6], de Mersenne (Mangueira *et al.*, 2023)[7], de Jacobsthal (Uygun, 2024)[8], de Gersenne (Catarino; Santos; Costa, 2025)[9] e de Leonardo (Vieira; Alves; Catarino, 2019)[10][11].

Este artigo está estruturado da seguinte forma: a próxima seção apresenta a fórmula de recorrência, a fórmula do termo geral e a função geradora para os números multifigurados quadrados-nonagonais. Na Seção 3, introduzimos as versões bidimensionais para essa sequência de números, apresentando uma expressão fechada que a generaliza. Na seção 4, apresentamos as relações recorrentes tridimensionais definidas a partir do modelo unidimensional da sequência dos números multifigurados quadrados-nonagonais. Finalmente, na seção 5, essas relações são generalizadas para uma certa dimensão t . A última seção dedica-se à considerações e às perspectivas de pesquisas futuras.

2 Recorrência, Fórmula do Termo geral e Função geradora para os números multifigurados quadrados-nonagonais

De acordo com Tavares (2021)[12] os números figurados poligonais são formados por uma coleção finita de pontos que, ao serem arranjados no plano, formam polígonos regulares como triângulos, quadrados, pentágonos, entre outros. Além disso, esses números podem ser representados por sequências numéricas como, por exemplo, a sequência dos números quadrados e dos números nonagonais são apresentadas a seguir

$$\{S_4(v)\}_{v \geq 1} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots, v^2, \dots\},$$

$$\{S_9(u)\}_{u \geq 1} = \left\{ 1, 9, 24, 46, 75, 111, 154, \dots, \frac{1}{2}u(7u-5), \dots \right\}.$$

Deza e Deza (2012)[2] fornecem a seguinte fórmula fechada que generaliza os números poligonais, na qual $p \geq 3$ é o número de lados do polígono

$$S_p(n) = \frac{n[(p-2)n - p + 4]}{2}. \quad (1)$$

Veja que ao substituirmos $p = 9$ na Equação (1) obtemos a fórmula fechada para os números nonagonais dada por: $S_9(u) = \frac{1}{2}u(7u-5)$. Enquanto os números quadrados são descritos por $S_4(v) = v^2$, ou seja, substituindo $p = 4$ na Equação (1). Assim, os números multifigurados quadrados-nonagonais podem ser encontrados por meio da seguinte igualdade

$$S_9(u) = S_4(v),$$

conduzindo à seguinte equação de Pell generalizada

$$x^2 - 14y^2 = 25, \quad (2)$$

desde que $x = 14u - 5$ e $y = 2v$.

Importante destacar que a dedução da Equação (2) e a caracterização inicial de suas soluções foram apresentadas em Bezerra *et al.* (2025)[3]. Consideremos os seguintes pares de soluções particulares inteiras da forma $x > 0$ e $y > 0$ para a Equação (2)

$$\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 1} = \{(9, 2), (23, 6), (75, 20), (247, 66), (681, 182), (2245, 600), \dots\}.$$

E as soluções inteiras correspondentes nas variáveis u e v são

$$\{(u_n, v_n)\}_{n \geq 1} = \{(1, 1), (2, 3), (18, 33), (49, 91), (529, 989), \dots\}. \quad (3)$$

Assim, para determinar a fórmula de recorrência para os números multifigurados quadrados-nonagonais, vamos considerar a sequência de soluções (u, v) dada na Equação (3) que, como sabemos, está associada à Equação (2). Inicialmente consideramos apenas os elementos pertencentes à segunda coordenada de cada vetor, ou seja, a sequência $\{v_n\}_{n \geq 1} = \{1, 3, 33, 91, 989, 2727, \dots\}$. Conforme a Enciclopédia de Sequências Inteiras (on-line) [13], sequência designada por A048911, essa sequência pode ser obtida por uma fórmula de recorrência homogênea de ordem 4, em que $n \geq 4$

$$v_{n+1} = 30v_{n-1} - v_{n-3}, \quad (4)$$

em que $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 33$ e $v_4 = 91$ são seus termos iniciais.

Dois resultados importantes envolvendo a Recorrência (4) foram estabelecidos em Bezerra *et al.* (2025) [3].

Lema 1. *Seja $\{v_n\}_{n \geq 1}$ dada por (4), então, para todo $n \geq 3$ vale que*

$$v_n^2 + v_{n-2}^2 - 30v_nv_{n-2} = 100.$$

Lema 2. *Para todo $n \geq 3$, vale a identidade*

$$v_n^2 - v_{n+2}v_{n-2} = 100, \quad (5)$$

uma vez que $\{v_n\}_{n \geq 1}$ dada por (4).

Fazendo $n = 3$ em (4), obtemos $v_0 = -1$. Por conveniência, usamos

$$\{v_n\}_{n \geq 0} = \{-1, 1, 3, 33, 91, 989, 2727, \dots\}. \quad (6)$$

Note que $S_{9,4}(n) = v_n^2$, em que v_n é a solução associada ao par (u_n, v_n) . Daqui em diante, por conveniência, consideremos $S_{9,4}(n)$ associado à sequência $\{v_n\}_{n \geq 0}$ dada em (6). Assim, obtemos a seguinte sequência dos números multifigurados quadrados-nonagonais

$$\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 9, 1089, 8281, 978121, 7436529, \dots\}.$$

Pela recorrência (4), notamos que

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 &= (30v_{n-1} - v_{n-3})^2 \\ &= 900v_{n-1}^2 - 2 \cdot 30v_{n-1}v_{n-3} + v_{n-3}^2 \\ &= 900v_{n-1}^2 - 2(v_{n+1} + v_{n-3})v_{n-3} + v_{n-3}^2 \\ &= 900v_{n-1}^2 - 2v_{n+1}v_{n-3} - v_{n-3}^2. \end{aligned}$$

Agora, fazendo uso da identidade (5), obtemos

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 &= 900v_{n-1}^2 - 2(v_{n-1}^2 - 100) - v_{n-3}^2 \\ &= 898v_{n-1}^2 - v_{n-3}^2 + 200. \end{aligned}$$

Fundamentados na discussão anterior, e usando o fato que $S_{9,4}(n) = v_n^2$, obtém-se a seguinte recorrência para os números multifigurados quadrados-nonagonais.

Teorema 3. Para todo natural $n \geq 3$ os números multifigurados quadrados-nonagonais $\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 0}$ satisfazem a relação de recorrência não-homogênea

$$S_{9,4}(n+1) = 898S_{9,4}(n-1) - S_{9,4}(n-3) + 200, \quad (7)$$

com valores iniciais $S_{9,4}(0) = 1$, $S_{9,4}(1) = 1$, $S_{9,4}(2) = 9$ e $S_{9,4}(3) = 1089$.

Nota-se que a Recorrência (7) é não homogênea de ordem 4. Para eliminar a constante e determinar uma relação homogênea, façamos a diferença $S_{9,4}(n+1) - S_{9,4}(n)$, vejamos

$$\begin{aligned} &S_{9,4}(n+1) - S_{9,4}(n) \\ &= [898S_{9,4}(n-1) - S_{9,4}(n-3) + 200] - [898S_{9,4}(n-2) - S_{9,4}(n-4) + 200] \\ S_{9,4}(n+1) &= S_{9,4}(n) + 898S_{9,4}(n-1) - 898S_{9,4}(n-2) - S_{9,4}(n-3) + S_{9,4}(n-4), \end{aligned}$$

e obtemos uma recorrência homogênea de ordem 5.

Teorema 4. Para todo natural $n \geq 4$ os números multifigurados quadrados-nonagonais $\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 0}$ satisfazem a seguinte relação de recorrência homogênea

$$S_{9,4}(n+1) = S_{9,4}(n) + 898S_{9,4}(n-1) - 898S_{9,4}(n-2) - S_{9,4}(n-3) + S_{9,4}(n-4), \quad (8)$$

com valores iniciais $S_{9,4}(0) = 1$, $S_{9,4}(1) = 1$, $S_{9,4}(2) = 9$, $S_{9,4}(3) = 1089$ e $S_{9,4}(4) = 8281$.

O polinômio característico associado à Recorrência (8) é

$$x^5 - x^4 - 898x^3 + 898x^2 + x - 1 = 0, \quad (9)$$

cujas raízes reais são

$$x_1 = 1, x_2 = -15 - 4\sqrt{14}, x_3 = -15 + 4\sqrt{14}, x_4 = 15 - 4\sqrt{14} \text{ e } x_5 = 15 + 4\sqrt{14}. \quad (10)$$

A relação de recorrência (8) permite-nos agora avançar para a dedução de uma fórmula fechada ou explícita para o termo geral da sequência dos números multifigurados quadrados-nonagonais. Estas fórmulas são conhecidas na literatura como fórmulas fechadas do tipo-Binet.

Teorema 5. A fórmula tipo-Binet para os números multifigurados quadrados-nonagonais $\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 0}$ é da forma

$$S_{9,4}(n) = \frac{1}{112}(-4\sqrt{14} + 15)^n(11\sqrt{14} + 44) + \frac{1}{32}(-2\sqrt{14} + 7)(-4\sqrt{14} - 15)^n + \frac{1}{112}(-11\sqrt{14} + 44)(4\sqrt{14} + 15)^n + \frac{1}{32}(2\sqrt{14} + 7)(4\sqrt{14} - 15)^n - \frac{25}{112}. \quad (11)$$

Demonstração. Dada a Recorrência (8), queremos encontrar uma fórmula do tipo

$$S_{9,4}(n) = \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n + \epsilon x_4^n + \mu x_5^n,$$

em que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 são as raízes do polinômio característico expressas em (10), e sendo $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ e μ constantes reais à determinar.

Considerando os termos iniciais $S_{9,4}(0) = 1, S_{9,4}(1) = 1, S_{9,4}(2) = 9, S_{9,4}(3) = 1089, S_{9,4}(4) = 8281$, obtemos o seguinte sistema linear de ordem 5

$$\begin{cases} S_{9,4}(0) = \alpha + \beta + \gamma + \epsilon + \mu = 1 \\ S_{9,4}(1) = \alpha + \beta(-15 - 4\sqrt{14}) + \gamma(-15 + 4\sqrt{14}) + \epsilon(15 - 4\sqrt{14}) + \mu(15 + 4\sqrt{14}) = 1 \\ S_{9,4}(2) = \alpha + \beta(-15 - 4\sqrt{14})^2 + \gamma(-15 + 4\sqrt{14})^2 + \epsilon(15 - 4\sqrt{14})^2 + \mu(15 + 4\sqrt{14})^2 = 9 \\ S_{9,4}(3) = \alpha + \beta(-15 - 4\sqrt{14})^3 + \gamma(-15 + 4\sqrt{14})^3 + \epsilon(15 - 4\sqrt{14})^3 + \mu(15 + 4\sqrt{14})^3 = 1089 \\ S_{9,4}(4) = \alpha + \beta(-15 - 4\sqrt{14})^4 + \gamma(-15 + 4\sqrt{14})^4 + \epsilon(15 - 4\sqrt{14})^4 + \mu(15 + 4\sqrt{14})^4 = 8281 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear acima por meio de recursos computacionais obtemos os seguintes valores para as constantes $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \mu$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{25}{112}, & \beta &= -\frac{2\sqrt{14} + 7}{32}, \\ \gamma &= \frac{2\sqrt{14} + 7}{32}, & \epsilon &= \frac{11\sqrt{14} + 44}{112}, \\ \mu &= -\frac{11\sqrt{14} + 44}{112}. \end{aligned}$$

Logo, a fórmula do termo geral que descreve os números multifigurados quadrados-nonagonais é

$$S_{9,4}(n) = \frac{-25}{112} + \left(\frac{-2\sqrt{14}+7}{32} \right) (-15-4\sqrt{14})^n + \left(\frac{2\sqrt{14}+7}{32} \right) (-15+4\sqrt{14})^n \\ + \left(\frac{11\sqrt{14}+44}{112} \right) (15-4\sqrt{14})^n + \left(-\frac{11\sqrt{14}+44}{112} \right) (15+4\sqrt{14})^n, \quad n \geq 1.$$

De onde obtemos (11). □

Usando (11), escrevemos os 9 primeiros números multifigurados quadrados-nonagonais

$$\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 0} = \{1, 1, 9, 1089, 8281, 978121, 7436529, 878351769, 6677994961, \dots\}.$$

Após a obtenção de uma expressão explícita para o termo geral da sequência, é possível determinar a função geradora associada aos números quadrados-nonagonais. Tal função permite representar a sequência por meio de uma série formal de potências, o que permite novas formas de análise e manipulação algébrica. A seguir, enunciamos o teorema correspondente.

Teorema 6. *A função geradora dos números multifigurados quadrados-nonagonais é descrita por*

$$f(x) = \frac{-9x^4 - 1080x^3 + 890x^2 - 1}{x^5 - x^4 - 898x^3 + 898x^2 + x - 1}.$$

Demonstração. Seja $f(x) = \sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n$ então, multiplicando a função $f(x)$ por $x, 898x^2, 898x^3, x^4, x^5$ respectivamente, obtemos

$$\sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n = S_{9,4}(0)x^0 + S_{9,4}(1)x + S_{9,4}(2)x^2 + S_{9,4}(3)x^3 + S_{9,4}(4)x^4 + \dots + S_{9,4}(k)x^k, \quad (12)$$

$$x \sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n = S_{9,4}(0)x + S_{9,4}(1)x^2 + S_{9,4}(2)x^3 + S_{9,4}(3)x^4 + \dots + S_{9,4}(k-1)x^k, \quad (13)$$

$$898x^2 \sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n = 898S_{9,4}(0)x^2 + 898S_{9,4}(1)x^3 + 898S_{9,4}(2)x^4 + \dots + 898S_{9,4}(k-2)x^k, \quad (14)$$

$$898x^3 \sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n = 898S_{9,4}(0)x^3 + 898S_{9,4}(1)x^4 + \dots + 898S_{9,4}(k-3)x^k, \quad (15)$$

$$x^4 \sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n = S_{9,4}(0)x^4 + S_{9,4}(1)x^5 + \dots + S_{9,4}(k-4)x^k, \quad (16)$$

$$x^5 \sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n = S_{9,4}(0)x^5 + S_{9,4}(1)x^6 + \dots + S_{9,4}(k-5)x^k. \quad (17)$$

Portanto, considerando a equação (12)-(13)-(14)+(15)+(16)-(17), tem-se que

$$(1 - x - 898x^2 + 898x^3 + x^4 - x^5) \sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n \\ = 1 + (S_{9,4}(2) - S_{9,4}(1) - 898S_{9,4}(0))x^2 + (S_{9,4}(3) - S_{9,4}(2) - 898S_{9,4}(1) + 898S_{9,4}(0))x^3 \\ + (S_{9,4}(4) - S_{9,4}(3) - 898S_{9,4}(2) + 898S_{9,4}(1) + S_{9,4}(0))x^4 + \dots \\ + (S_{9,4}(k) - S_{9,4}(k-1) - 898S_{9,4}(k-2) + 898S_{9,4}(k-3) + S_{9,4}(k-4) - S_{9,4}(k-5))x^k.$$

Assim, considerando os termos iniciais

$$S_{9,4}(0) = 1, \quad S_{9,4}(1) = 1, \quad S_{9,4}(2) = 9, \quad S_{9,4}(3) = 1089, \quad S_{9,4}(4) = 8281,$$

e que

$$S_{9,4}(k) - S_{9,4}(k-1) - 898S_{9,4}(k-2) + 898S_{9,4}(k-3) + S_{9,4}(k-4) - S_{9,4}(k-5) = 0, \quad k \geq 5.$$

Tem-se que

$$\sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n = \frac{1 - 890x^2 + 1080x^3 + 9x^4}{1 - x - 898x^2 + 898x^3 + x^4 - x^5}.$$

Logo,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} S_{9,4}(n)x^n = \frac{-9x^4 - 1080x^3 + 890x^2 - 1}{x^5 - x^4 - 898x^3 + 898x^2 + x - 1}.$$

□

A partir das propriedades estabelecidas na abordagem unidimensional dos números multifigurados quadrados-nonagonais, particularmente sua fórmula de recorrência, termo geral e função geradora, torna-se natural investigar possíveis extensões dessa sequência para outras dimensões. Nesse sentido, a próxima seção introduz a versão bidimensional desses números, incorporando uma segunda variável associada a unidades imaginárias.

3 As relações Bidimensionais para os números multifigurados quadrados-nonagonais

O processo de complexificação de sequências numéricas foi introduzido de forma pioneira por Harman (1981) [14] por meio da extensão dos números de Fibonacci para o plano complexo. De acordo com Harman (1981) [14], os números da forma $(n, m) = n + mi$, em que n e m são inteiros, são definidos como uma recorrência bidimensional. Assim, para verificar a extensão da sequência dos números multifigurados quadrados-nonagonais para a dimensão complexa, as relações recorrentes do caso bidimensional serão exploradas nesta seção.

Definição 7. Os números bidimensionais denotados por $\{S_{9,4}(n, m)\}_{n, m \geq 0}$ são definidos como a sequência bidimensional dos números multifigurados quadrados-nonagonais, satisfazendo as seguintes relações de recorrência

$$S_{9,4}(n+1, m) = S_{9,4}(n, m) + 898S_{9,4}(n-1, m) - 898S_{9,4}(n-2, m) - S_{9,4}(n-3, m) + S_{9,4}(n-4, m), \text{ para } n \geq 4 \text{ e } m \geq 0, \quad (18)$$

$$S_{9,4}(n, m+1) = S_{9,4}(n, m) + 898S_{9,4}(n, m-1) - 898S_{9,4}(n, m-2) - S_{9,4}(n, m-3) + S_{9,4}(n, m-4), \text{ para } n \geq 0 \text{ e } m \geq 4, \quad (19)$$

sendo $i^2 = -1$ e com valores iniciais $S_{9,4}(n, m) = v_n^2 + v_m^2 i$ para $0 \leq n \leq 4$ e $0 \leq m \leq 4$.

Veja que com os valores iniciais dados na Definição 7 são os seguintes números bidimensionais:

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(0,0) &= 1+i, & S_{9,4}(1,0) &= 1+i, & S_{9,4}(2,0) &= 9+i, \\
 S_{9,4}(3,0) &= 1089+i, & S_{9,4}(4,0) &= 8281+i, & S_{9,4}(0,1) &= 1+i, \\
 S_{9,4}(0,2) &= 1+9i, & S_{9,4}(0,3) &= 1+1089i, & S_{9,4}(0,4) &= 1+8281i, \\
 S_{9,4}(1,1) &= 1+i, & S_{9,4}(2,1) &= 9+i, & S_{9,4}(3,1) &= 1089+i, \\
 S_{9,4}(4,1) &= 8281+i, & S_{9,4}(1,2) &= 1+9i, & S_{9,4}(1,3) &= 1+1089i, \\
 S_{9,4}(1,4) &= 1+8281i, & S_{9,4}(2,2) &= 9+9i, & S_{9,4}(2,3) &= 9+1089i, \\
 S_{9,4}(2,4) &= 9+8281i, & S_{9,4}(3,2) &= 1089+9i, & S_{9,4}(3,3) &= 1089+1089i, \\
 S_{9,4}(3,4) &= 1089+8281i, & S_{9,4}(4,2) &= 8281+9i, & S_{9,4}(4,3) &= 8281+1089i, \\
 S_{9,4}(4,4) &= 8281+8281i
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a Definição 7 faz sentido, ou seja, está bem definida.

Proposição 8. Para $n_0 \geq 5$ e $m_0 \geq 5$ inteiros, o termo $S_{9,4}(n_0, m_0)$ independe do caminho a ser tomado, em que $\{S_{9,4}(n, m)\}_{n,m \geq 0}$ é a sequência bidimensional dos números multifigurados quadrados-nonagonais.

Demonstração. Sejam $n_0 \geq 5$ e $m_0 \geq 5$ inteiros. Pela Recorrência (18), segue que

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n_0, m_0) &= S_{9,4}(n_0 - 1, m_0) + 898S_{9,4}(n_0 - 2, m_0) - 898S_{9,4}(n_0 - 3, m_0) - S_{9,4}(n_0 - 4, m_0) \\
 &\quad + S_{9,4}(n_0 - 5, m_0). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Agora, usando a Recorrência (19), temos

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n_0 - 1, m_0) &= S_{9,4}(n_0 - 1, m_0 - 1) + 898S_{9,4}(n_0 - 1, m_0 - 2) - 898S_{9,4}(n_0 - 1, m_0 - 3) \\
 &\quad - S_{9,4}(n_0 - 1, m_0 - 4) + S_{9,4}(n_0 - 1, m_0 - 5), \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n_0 - 2, m_0) &= S_{9,4}(n_0 - 2, m_0 - 1) + 898S_{9,4}(n_0 - 2, m_0 - 2) - 898S_{9,4}(n_0 - 2, m_0 - 3) \\
 &\quad - S_{9,4}(n_0 - 2, m_0 - 4) + S_{9,4}(n_0 - 2, m_0 - 5), \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n_0 - 3, m_0) &= S_{9,4}(n_0 - 3, m_0 - 1) + 898S_{9,4}(n_0 - 3, m_0 - 2) - 898S_{9,4}(n_0 - 3, m_0 - 3) \\
 &\quad - S_{9,4}(n_0 - 3, m_0 - 4) + S_{9,4}(n_0 - 3, m_0 - 5), \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n_0 - 4, m_0) &= S_{9,4}(n_0 - 4, m_0 - 1) + 898S_{9,4}(n_0 - 4, m_0 - 2) - 898S_{9,4}(n_0 - 4, m_0 - 3) \\
 &\quad - S_{9,4}(n_0 - 4, m_0 - 4) + S_{9,4}(n_0 - 4, m_0 - 5), \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n_0 - 5, m_0) &= S_{9,4}(n_0 - 5, m_0 - 1) + 898S_{9,4}(n_0 - 5, m_0 - 2) - 898S_{9,4}(n_0 - 5, m_0 - 3) \\
 &\quad - S_{9,4}(n_0 - 5, m_0 - 4) + S_{9,4}(n_0 - 5, m_0 - 5). \quad (25)
 \end{aligned}$$

Substituindo as Equações (21), (22), (23), (24) e (25) no lado direito da Equação (20), agrupando os termos com segunda coordenada $m_0 - 1$ e utilizando a Recorrência (18), resulta

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n_0 - 1, m_0 - 1) + 898S_{9,4}(n_0 - 2, m_0 - 1) - 898S_{9,4}(n_0 - 3, m_0 - 1) \\
 - S_{9,4}(n_0 - 4, m_0 - 1) + S_{9,4}(n_0 - 5, m_0 - 1) = S_{9,4}(n_0, m_0 - 1).
 \end{aligned}$$

Analogamente, agrupando os termos com segunda coordenada igual a $m_0 - 2$, conclui-se que

$$\begin{aligned}
 898[S_{9,4}(n_0 - 1, m_0 - 2) + 898S_{9,4}(n_0 - 2, m_0 - 2) \\
 - 898S_{9,4}(n_0 - 3, m_0 - 2) - S_{9,4}(n_0 - 4, m_0 - 2) + S_{9,4}(n_0 - 5, m_0 - 2)] = 898S_{9,4}(n_0, m_0 - 2).
 \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma para $m_0 - 3$, $m_0 - 4$ e $m_0 - 5$ obtemos os fatores correspondentes

$$-898S_{9,4}(n_0, m_0 - 3), -S_{9,4}(n_0, m_0 - 4) \text{ e } S_{9,4}(n_0, m_0 - 5).$$

Portanto, a Equação (20) é equivalente a

$$S_{9,4}(n_0, m_0) = S_{9,4}(n_0, m_0 - 1) + 898S_{9,4}(n_0, m_0 - 2) - 898S_{9,4}(n_0, m_0 - 3) \\ - S_{9,4}(n_0, m_0 - 4) + S_{9,4}(n_0, m_0 - 5).$$

Disto concluímos que $S_{9,4}(n_0, m_0)$ não depende do caminho. $\square$

A Proposição 8 mostra que a Definição 7 é válida no contexto de um termo geral $S_{9,4}(n, m)$ e independente da equação que consideramos. Para ilustrar, vamos encontrar o elemento $S_{9,4}(5, 5)$, temos dois caminhos, conforme segue

$$\begin{cases} S_{9,4}(5, 5) = S_{9,4}(4, 5) + 898S_{9,4}(3, 5) - 898S_{9,4}(2, 5) - S_{9,4}(1, 5) + S_{9,4}(0, 5), & \text{caminho (a);} \\ S_{9,4}(5, 5) = S_{9,4}(5, 4) + 898S_{9,4}(5, 3) - 898S_{9,4}(5, 2) - S_{9,4}(5, 1) + S_{9,4}(5, 0), & \text{caminho (b).} \end{cases}$$

Consideremos o caminho (a), temos que

$$\begin{aligned} S_{9,4}(4, 5) &= S_{9,4}(4, 4) + 898S_{9,4}(4, 3) - 898S_{9,4}(4, 2) - S_{9,4}(4, 1) + S_{9,4}(4, 0) \\ &= 8281 + 8281i + 898(8281 + 1089i) - 898(8281 + 9i) \\ &\quad - (8281 + i) + (8281 + i) \\ &= 8281 + 978121i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(3, 5) &= S_{9,4}(3, 4) + 898S_{9,4}(3, 3) - 898S_{9,4}(3, 2) - S_{9,4}(3, 1) + S_{9,4}(3, 0) \\ &= 1089 + 8281i + 898(1089 + 1089i) - 898(1089 + 9i) \\ &\quad - (1089 + i) + (1089 + i) \\ &= 1089 + 978121i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(2, 5) &= S_{9,4}(2, 4) + 898S_{9,4}(2, 3) - 898S_{9,4}(2, 2) - S_{9,4}(2, 1) + S_{9,4}(2, 0) \\ &= 9 + 8281i + 898(9 + 1089i) - 898(9 + 9i) \\ &\quad - (9 + i) + (9 + i) \\ &= 9 + 978121i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(1, 5) &= S_{9,4}(1, 4) + 898S_{9,4}(1, 3) - 898S_{9,4}(1, 2) - S_{9,4}(1, 1) + S_{9,4}(1, 0) \\ &= 1 + 8281i + 898(1 + 1089i) - 898(1 + 9i) \\ &\quad - (1 + i) + (1 + i) \\ &= 1 + 978121i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(0, 5) &= S_{9,4}(0, 4) + 898S_{9,4}(0, 3) - 898S_{9,4}(0, 2) - S_{9,4}(0, 1) + S_{9,4}(0, 0) \\ &= 1 + 978121i + 898(1 + 8281i) - 898(1 + 1089i) \\ &\quad - (1 + 9i) + (1 + i) \\ &= 1 + 978121i. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{9,4}(5, 5) &= 8281 + 978121i + 898(1089 + 978121i) - 898(9 + 978121i) \\ &\quad - (1 + 978121i) + (1 + 978121i) \\ &= 978121 + 978121i. \end{aligned}$$

Agora, consideremos o caminho (b). Temos que

$$\begin{aligned} S_{9,4}(5, 4) &= S_{9,4}(4, 4) + 898S_{9,4}(3, 4) - 898S_{9,4}(2, 4) - S_{9,4}(1, 4) + S_{9,4}(0, 4) \\ &= 8281 + 8281i + 898(1089 + 8281i) - 898(9 + 8281i) \\ &\quad - (1 + 8281i) + (1 + 8281i) \\ &= 978121 + 8281i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(5, 3) &= S_{9,4}(4, 3) + 898S_{9,4}(3, 3) - 898S_{9,4}(2, 3) - S_{9,4}(1, 3) + S_{9,4}(0, 3) \\ &= 8281 + 1089i + 898(1089 + 1089i) - 898(9 + 1089i) \\ &\quad - (1 + 1089i) + (1 + 1089i) \\ &= 978121 + 1089i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(5, 2) &= S_{9,4}(4, 2) + 898S_{9,4}(3, 2) - 898S_{9,4}(2, 2) - S_{9,4}(1, 2) + S_{9,4}(0, 2) \\ &= 8281 + 9i + 898(1089 + 9i) - 898(9 + 9i) \\ &\quad - (1 + 9i) + (1 + 9i) \\ &= 978121 + 9i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(5, 1) &= S_{9,4}(4, 1) + 898S_{9,4}(3, 1) - 898S_{9,4}(2, 1) - S_{9,4}(1, 1) + S_{9,4}(0, 1) \\ &= 8281 + i + 898(1089 + i) - 898(9 + i) \\ &\quad - (1 + i) + (1 + i) \\ &= 978121 + i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(5, 0) &= S_{9,4}(4, 0) + 898S_{9,4}(3, 0) - 898S_{9,4}(2, 0) - S_{9,4}(1, 0) + S_{9,4}(0, 0) \\
 &= 8281 + i + 898(1089 + i) - 898(9 + i) \\
 &\quad - (1 + i) + (1 + i) \\
 &= 978121 + i.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(5, 5) &= 978121 + 8281i + 898(978121 + 1089i) - 898(978121 + 9i) \\
 &\quad - (978121 + i) + (978121 + i) \\
 &= 978121 + 978121i.
 \end{aligned}$$

Uma vez verificada, pela Proposição 8, a consistência da definição bidimensional, isto é, a independência do caminho tomado para o cálculo de $S_{9,4}(n, m)$, podemos agora examinar algumas propriedades elementares dessa extensão bidimensional que estão enunciadas na proposição a seguir.

Proposição 9. *Para todos inteiros $n \geq 0$, $m \geq 0$, valem as seguintes propriedades:*

- (a) $S_{9,4}(n, 0) = S_{9,4}(n) + i$,
- (b) $S_{9,4}(0, m) = 1 + S_{9,4}(m)i$,
- (c) $S_{9,4}(n, 1) = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(1)i$,
- (d) $S_{9,4}(1, m) = S_{9,4}(1) + S_{9,4}(m)i$, sendo $i^2 = -1$,

em que $\{S_{9,4}(n, m)\}_{n,m \geq 0}$ é dado na Definição 7.

Demonstração. (a) Por meio da Recorrência (18), fixando $m = 0$, varia-se $n = 4, 5, 6, \dots$, recorrendo ao Princípio de Indução Matemática.

Para $n = 4$, temos

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(5, 0) &= S_{9,4}(4, 0) + 898S_{9,4}(3, 0) - 898S_{9,4}(2, 0) - S_{9,4}(1, 0) + S_{9,4}(0, 0) \\
 &= 8281 + i + 898 \cdot (1089 + i) - 898 \cdot (9 + i) - (1 + i) + (1 + i) \\
 &= 8281 + i + 977922 + 898i - 8082 - 898i \\
 &= 978121 + i \\
 &= S_{9,4}(5) + S_{9,4}(0)i.
 \end{aligned}$$

Assumindo que seja verdadeiro para n , devemos mostrar que é válido também para $n + 1$. Portanto

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n+1, 0) &= S_{9,4}(n, 0) + 898 S_{9,4}(n-1, 0) - 898 S_{9,4}(n-2, 0) \\
 &\quad - S_{9,4}(n-3, 0) + i + S_{9,4}(n-4, 0) \\
 &= S_{9,4}(n) + i + 898 (S_{9,4}(n-1) + i) - 898 (S_{9,4}(n-2) + i) \\
 &\quad - (S_{9,4}(n-3) + i) + (S_{9,4}(n-4) + i) \\
 &= S_{9,4}(n+1) + i \\
 &= S_{9,4}(n+1) + S_{9,4}(0)i.
 \end{aligned}$$

Para a demonstração de (b), utiliza-se o mesmo princípio de indução, considerando a Recorrência (19). Fixando $n = 0$ e variando $m = 4, 5, 6, \dots$, obtendo

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(0, 5) &= S_{9,4}(0, 4) + 898 S_{9,4}(0, 3) - 898 S_{9,4}(0, 2) - S_{9,4}(0, 1) + S_{9,4}(0, 0) \\
 &= 1 + 8281i + 898 \cdot (1 + 1089i) - 898 \cdot (1 + 9i) - (1 + i) + (1 + i) \\
 &= 1 + 8281i + 977922i - 8082i \\
 &= 1 + 978121i \\
 &= S_{9,4}(0) + S_{9,4}(5)i,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(0, m+1) &= S_{9,4}(0, m) + 898 S_{9,4}(0, m-1) - 898 S_{9,4}(0, m-2) - S_{9,4}(0, m-3) + S_{9,4}(0, m-4) \\
 &= S_{9,4}(0) + S_{9,4}(m)i + 898 (S_{9,4}(0) + S_{9,4}(m-1)i) - 898 (S_{9,4}(0) + S_{9,4}(m-2)i) \\
 &\quad - (S_{9,4}(0) + S_{9,4}(m-3)i) + (S_{9,4}(0) + S_{9,4}(m-4)i) \\
 &= S_{9,4}(0) + S_{9,4}(m+1)i.
 \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos demonstrar (c), fixando $m = 1$ e variando $n = 4, 5, 6, \dots$, obtendo

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(5, 1) &= S_{9,4}(4, 1) + 898 S_{9,4}(3, 1) - 898 S_{9,4}(2, 1) - S_{9,4}(1, 1) + S_{9,4}(0, 1) \\
 &= (8281 + i) + 898(1089 + i) - 898(9 + i) - (1 + i) + (1 + i) \\
 &= 8281 + i + 977922 + 898i - 8082 - 898i - 1 - i + 1 + i \\
 &= 978121 + i \\
 &= S_{9,4}(5) + S_{9,4}(1)i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n+1, 1) &= S_{9,4}(n, 1) + 898 S_{9,4}(n-1, 1) - 898 S_{9,4}(n-2, 1) - S_{9,4}(n-3, 1) + S_{9,4}(n-4, 1) \\
 &= S_{9,4}(n) + i + 898 (S_{9,4}(n-1) + i) - 898 (S_{9,4}(n-2) + i) \\
 &\quad - (S_{9,4}(n-3) + i) + (S_{9,4}(n-4) + i) \\
 &= S_{9,4}(n) + 898 S_{9,4}(n-1) - 898 S_{9,4}(n-2) - S_{9,4}(n-3) + S_{9,4}(n-4) + i \\
 &= S_{9,4}(n+1) + i.
 \end{aligned}$$

Por fim, para a demonstração de (d), fixamos $n = 1$ e variando $m = 4, 5, 6, \dots$, obtemos

$$\begin{aligned} S_{9,4}(1, 5) &= S_{9,4}(1, 4) + 898S_{9,4}(1, 3) - 898S_{9,4}(1, 2) - S_{9,4}(1, 1) + S_{9,4}(1, 0) \\ &= (1 + 8281i) + 898(1 + 1089i) - 898(1 + 9i) - (1 + i) + (1 + i) \\ &= 1 + 8281i + 898 + 977922i - 898 - 8082i - i - 1 + 1 + i \\ &= 1 + (978121i) = S_{9,4}(1) + S_{9,4}(5)i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(1, m + 1) &= S_{9,4}(1, m) + 898S_{9,4}(1, m - 1) - 898S_{9,4}(1, m - 2) \\ &\quad - S_{9,4}(1, m - 3) + S_{9,4}(1, m - 4) \\ &= S_{9,4}(1) + S_{9,4}(m)i + 898(S_{9,4}(1) + S_{9,4}(m - 1)i) \\ &\quad - 898(S_{9,4}(1) + S_{9,4}(m - 2)i) \\ &\quad - (S_{9,4}(1) + S_{9,4}(m - 3)i) + (S_{9,4}(1) + S_{9,4}(m - 4)i) \\ &\quad - S_{9,4}(m - 3)i + S_{9,4}(m - 4)i \\ &= S_{9,4}(1) + (S_{9,4}(m) + 898S_{9,4}(m - 1) - 898S_{9,4}(m - 2) \\ &\quad - S_{9,4}(m - 3) + S_{9,4}(m - 4))i \\ &= S_{9,4}(1) + S_{9,4}(m + 1)i. \end{aligned}$$

□

A seguir, enunciaremos um resultado que nos permitirá determinar uma expressão explícita para os números da forma $S_{9,4}(n, m)$ em que $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Teorema 10. Para $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, os números bidimensionais quadrados-nonagonais são descritos por

$$S_{9,4}(n, m) = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i.$$

Demonstração. Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como meio de prova para o teorema em questão. Vamos iniciar fixando $n \in \mathbb{N}$ e usando indução sobre m .

Para $m = 0$, pela Proposição 9(a), temos que:

$$S_{9,4}(n, 0) = S_{9,4}(n) + i = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(0)i.$$

Supondo que seja verdadeiro para m , devemos mostrar que é válido para $m + 1$. Assim

$$\begin{aligned} S_{9,4}(n, m + 1) &= S_{9,4}(n, m) + 898S_{9,4}(n, m - 1) - 898S_{9,4}(n, m - 2) - S_{9,4}(n, m - 3) + S_{9,4}(n, m - 4) \\ &= S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + 898(S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m - 1)i) - 898(S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m - 2)i) \\ &\quad - (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m - 3)i) + (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m - 4)i) \\ &= S_{9,4}(n) + (S_{9,4}(m) + 898S_{9,4}(m - 1) - 898S_{9,4}(m - 2) - S_{9,4}(m - 3) + S_{9,4}(m - 4))i \\ &= S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m + 1)i. \end{aligned}$$

Agora vamos fixar $m \in \mathbb{N}$ e usar indução sobre n .

Para $n = 0$, pela Proposição 9 (b), temos que

$$S_{9,4}(0, m) = 1 + S_{9,4}(m)i = S_{9,4}(0) + S_{9,4}(m)i.$$

Supondo que é válido para n , devemos mostrar que é válido para $n + 1$. Vejamos

$$\begin{aligned} S_{9,4}(n+1, m) &= S_{9,4}(n, m) + 898S_{9,4}(n-1, m) - 898S_{9,4}(n-2, m) - S_{9,4}(n-3, m) + S_{9,4}(n-4, m) \\ &= S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + 898(S_{9,4}(n-1) + S_{9,4}(m)i) - 898(S_{9,4}(n-2) + S_{9,4}(m)i) \\ &\quad - (S_{9,4}(n-3) + S_{9,4}(m)i) + (S_{9,4}(n-4) + S_{9,4}(m)i) \\ &= (S_{9,4}(n) + 898S_{9,4}(n-1) - 898S_{9,4}(n-2) - S_{9,4}(n-3) + S_{9,4}(n-4)) + S_{9,4}(m)i \\ &= S_{9,4}(n+1) + S_{9,4}(m)i. \end{aligned}$$

□

4 As relações Tridimensionais para os números multifigurados quadrados-nonagonais

Nesta seção, serão apresentadas as relações tridimensionais dos números multifigurados quadrados-nonagonais, a partir do seu modelo unidimensional.

Definição 11. Os números na forma $S_{9,4}(n, m, p)$, em que $n, m, p \in \mathbb{N}$, são definidos como a sequência tridimensional dos números multifigurados quadrados-nonagonais, satisfazendo as seguintes relações de recorrência

$$S_{9,4}(n+1, m, p) = S_{9,4}(n, m, p) + 898S_{9,4}(n-1, m, p) - 898S_{9,4}(n-2, m, p) - S_{9,4}(n-3, m, p) + S_{9,4}(n-4, m, p), \quad \text{para } n \geq 4, m \geq 0, p \geq 0, \quad (26)$$

$$S_{9,4}(n, m+1, p) = S_{9,4}(n, m, p) + 898S_{9,4}(n, m-1, p) - 898S_{9,4}(n, m-2, p) - S_{9,4}(n, m-3, p) + S_{9,4}(n, m-4, p), \quad \text{para } n \geq 0, m \geq 4, p \geq 0, \quad (27)$$

$$S_{9,4}(n, m, p+1) = S_{9,4}(n, m, p) + 898S_{9,4}(n, m, p-1) - 898S_{9,4}(n, m, p-2) - S_{9,4}(n, m, p-3) + S_{9,4}(n, m, p-4), \quad \text{para } n \geq 0, m \geq 0, p \geq 4, \quad (28)$$

sendo $i^2 = j^2 = -1$ e com valores iniciais $S_{9,4}(n, m, p) = v_n^2 + v_m^2 i + v_p^2 j$ para $0 \leq n \leq 4, 0 \leq m \leq 4, 0 \leq p \leq 4$.

Veja que, com valores iniciais estabelecidos na Definição 11, obtém-se um total de $5^3 = 125$ elementos que formam a base da sequência tridimensional dos números quadrados-nonagonais. Esses termos iniciais asseguram a consistência do modelo e permitem a construção recursiva dos demais elementos da sequência. Assim como no caso bidimensional, é importante verificar que a definição proposta é bem estruturada, o que será garantido pelas propriedades enunciadas a seguir.

Proposição 12. Para todos inteiros $n \geq 0, m \geq 0, p \geq 0$, valem as seguintes propriedades:

- a) $S_{9,4}(n, 0, 0) = S_{9,4}(n) + i + j$
- b) $S_{9,4}(0, m, 0) = 1 + S_{9,4}(m)i + j$
- c) $S_{9,4}(0, 0, p) = 1 + i + S_{9,4}(p)j$
- d) $S_{9,4}(n, 1, 0) = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(1)i + j$
- e) $S_{9,4}(n, 0, 1) = S_{9,4}(n) + i + j$
- f) $S_{9,4}(n, 1, 1) = S_{9,4}(n) + i + j$
- g) $S_{9,4}(1, m, 0) = S_{9,4}(1) + S_{9,4}(m)i + j$
- h) $S_{9,4}(0, m, 1) = 1 + S_{9,4}(m)i + j$
- i) $S_{9,4}(1, m, 1) = 1 + S_{9,4}(m)i + j$
- j) $S_{9,4}(1, 0, p) = 1 + i + S_{9,4}(p)j$
- k) $S_{9,4}(0, 1, p) = 1 + i + S_{9,4}(p)j$
- l) $S_{9,4}(1, 1, p) = 1 + i + S_{9,4}(p)j$
- m) $S_{9,4}(n, m, 0) = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + j$
- n) $S_{9,4}(n, 0, p) = S_{9,4}(n) + i + S_{9,4}(p)j$
- o) $S_{9,4}(0, m, p) = 1 + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j$

Em que $\{S_{9,4}(n, m, p)\}_{n,m,p \geq 0}$ é dado na Definição 11.

Demonstração. (a) Por meio da Recorrência (26) fixando os valores de $m = 0$, $p = 0$, aplicamos o princípio de indução sobre n . Para $n = 4$, temos que

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(5, 0, 0) &= S_{9,4}(4, 0, 0) + 898S_{9,4}(3, 0, 0) - 898S_{9,4}(2, 0, 0) - S_{9,4}(1, 0, 0) + S_{9,4}(0, 0, 0) \\
 &= 8281 + i + j + 898.(1089 + i + j) - 898.(9 + i + j) - (1 + i + j) + (1 + i + j) \\
 &= 8281 + i + j + 977922 - 8082 = 978121 + i + j \\
 &= S_{9,4}(5) + i + j.
 \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para n , devemos provar que é verdadeiro também para $n + 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(n + 1, 0, 0) &= S_{9,4}(n, 0, 0) + 898 S_{9,4}(n - 1, 0, 0) - 898 S_{9,4}(n - 2, 0, 0) \\
 &\quad - S_{9,4}(n - 3, 0, 0) + S_{9,4}(n - 4, 0, 0) \\
 &= S_{9,4}(n) + i + j + 898(S_{9,4}(n - 1) + i + j) - 898(S_{9,4}(n - 2) + i + j) \\
 &\quad - (S_{9,4}(n - 3) + i + j) + S_{9,4}(n - 4) + i + j \\
 &= S_{9,4}(n + 1) + i + j.
 \end{aligned}$$

(b) Por meio da Recorrência (27) fixando os valores $n = 0, p = 0$, aplicaremos o princípio de indução sobre m . Para $m = 4$, temos que

$$\begin{aligned} S_{9,4}(0, 5, 0) &= S_{9,4}(0, 4, 0) + 898S_{9,4}(0, 3, 0) - 898S_{9,4}(0, 2, 0) - S_{9,4}(0, 1, 0) \\ &\quad + S_{9,4}(0, 0, 0) \\ &= 1 + 8281i + j + 898(1 + 1089i + j) - 898(1 + 9i + j) \\ &\quad - (1 + i + j) + (1 + i + j) \\ &= 1 + 978121i + j \\ &= 1 + S_{9,4}(5)i + j. \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para m , devemos mostrar que também é válido para $m + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} S_{9,4}(0, m + 1, 0) &= S_{9,4}(0, m, 0) + 898S_{9,4}(0, m - 1, 0) - 898S_{9,4}(0, m - 2, 0) - S_{9,4}(0, m - 3, 0) \\ &\quad + S_{9,4}(0, m - 4, 0) \\ &= 1 + S_{9,4}(m)i + j + 898(1 + S_{9,4}(m - 1)i + j) - 898(1 + S_{9,4}(m - 2)i + j) \\ &\quad - (1 + S_{9,4}(m - 3)i + j) + 1 + S_{9,4}(m - 4)i + j \\ &= 1 + (S_{9,4}(m) + 898S_{9,4}(m - 1) - 898S_{9,4}(m - 2) - S_{9,4}(m - 3) + S_{9,4}(m - 4))i + j \\ &= 1 + S_{9,4}(m + 1)i + j. \end{aligned}$$

(c) Por meio da Recorrência (28) fixando os valores $n = 0, p = 0$, aplicaremos o princípio de indução sobre p . Para $p = 4$, temos que

$$\begin{aligned} S_{9,4}(0, 0, 5) &= S_{9,4}(0, 0, 4) + 898S_{9,4}(0, 0, 3) - 898S_{9,4}(0, 0, 2) - S_{9,4}(0, 0, 1) \\ &\quad + S_{9,4}(0, 0, 0) = 1 + i + 8281j + 898(1 + i + 1089j) - 898(1 + i + 9j) - (1 + i + j) + (1 + i + j) \\ &= 1 + i + 978121j \\ &= 1 + i + S_{9,4}(5)j. \end{aligned}$$

Supondo que seja verdade para p , devemos mostrar que também é válido para $p + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} S_{9,4}(0, 0, p + 1) &= S_{9,4}(0, 0, p) + 898 S_{9,4}(0, 0, p - 1) - 898 S_{9,4}(0, 0, p - 2) \\ &\quad - S_{9,4}(0, 0, p - 3) + S_{9,4}(0, 0, p - 4) \\ &= 1 + i + S_{9,4}(p)j + 898 (1 + i + S_{9,4}(p - 1)j) - 898 (1 + i + S_{9,4}(p - 2)j) \\ &\quad - (1 + i + S_{9,4}(p - 3)j) + (1 + i + S_{9,4}(p - 4)j) \\ &= 1 + i + (S_{9,4}(p) + 898 S_{9,4}(p - 1) - 898 S_{9,4}(p - 2) - S_{9,4}(p - 3) + S_{9,4}(p - 4))j \\ &= 1 + i + S_{9,4}(p + 1)j. \end{aligned}$$

As demonstrações dos itens d), e), f), g), h), i), j), k), l), m), n) e o) serão omitidas pois são análogas às anteriores. $\square$

A seguir enunciamos um teorema que nos permite determinar uma expressão explícita para os números da forma $S_{9,4}(n.m.p)$, em que $(n, m, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Teorema 13. Para $(n, m, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, os números tridimensionais quadrados-nonagonais são descritos por

$$S_{9,4}(n, m, p) = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j, \text{ em que } i^2 = j^2 = -1.$$

Demonstração. Recorre-se ao Princípio de Indução Matemática como alternativa de prova para o teorema em questão. Começamos considerando n e m fixos, aplicaremos indução sobre p . Usando-se a Proposição 12(m), para $p = 0$

$$S_{9,4}(n, m, 0) = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + j = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(0)j.$$

Supondo que seja verdade para p , com n e m fixados, ou seja, $S_{9,4}(n, m, p) = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j$. Vamos provar que a igualdade também é verdadeira para $p + 1$.

$$\begin{aligned} S_{9,4}(n, m, p + 1) &= S_{9,4}(n, m, p) + 898 S_{9,4}(n, m, p - 1) - 898 S_{9,4}(n, m, p - 2) \\ &\quad - S_{9,4}(n, m, p - 3) + S_{9,4}(n, m, p - 4) \\ &= S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j \\ &\quad + 898 (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p - 1)j) \\ &\quad - 898 (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p - 2)j) \\ &\quad - (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p - 3)j) \\ &\quad + (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p - 4)j) \\ &= S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i \\ &\quad + (S_{9,4}(p) + 898 S_{9,4}(p - 1) - 898 S_{9,4}(p - 2) - S_{9,4}(p - 3) + S_{9,4}(p - 4))j \\ &= S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p + 1)j. \end{aligned}$$

Agora, fixemos n e p e usemos indução sobre m . Nesse sentido, para $m = 0$, usando-se a Proposição 12(n)

$$S_{9,4}(n, 0, p) = S_{9,4}(n) + i + S_{9,4}(p)j = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(0)i + S_{9,4}(p)j.$$

Supondo que seja verdade para m , com n e p fixados, ou seja, $S_{9,4}(n, m, p) = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j$. Vamos provar que a igualdade é verdadeira também para $m + 1$.

$$\begin{aligned} S_{9,4}(n, m + 1, p) &= S_{9,4}(n, m, p) + 898 S_{9,4}(n, m - 1, p) - 898 S_{9,4}(n, m - 2, p) \\ &\quad - S_{9,4}(n, m - 3, p) + S_{9,4}(n, m - 4, p) \\ &= S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j \\ &\quad + 898 (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m - 1)i + S_{9,4}(p)j) \\ &\quad - 898 (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m - 2)i + S_{9,4}(p)j) \\ &\quad - (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m - 3)i + S_{9,4}(p)j) \\ &\quad + (S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m - 4)i + S_{9,4}(p)j) \\ &= S_{9,4}(n) + (S_{9,4}(m) + 898 S_{9,4}(m - 1) - 898 S_{9,4}(m - 2) \\ &\quad - S_{9,4}(m - 3) + S_{9,4}(m - 4))i + S_{9,4}(p)j \\ &= S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m + 1)i + S_{9,4}(p)j. \end{aligned}$$

Agora, fixemos m e p e usemos indução sobre n . Nesse sentido, para $n = 0$, usando a Proposição 12 (o)

$$S_{9,4}(0, m, p) = 1 + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j = S_{9,4}(0) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j.$$

Supondo que seja verdade para n , com m e p fixados, ou seja, $S_{9,4}(n, m, p) = S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j$. Vamos provar que a igualdade é verdadeira também para $n + 1$.

$$\begin{aligned} S_{9,4}(n+1, m, p) &= S_{9,4}(n, m, p) + 898 S_{9,4}(n-1, m, p) - 898 S_{9,4}(n-2, m, p) \\ &\quad - S_{9,4}(n-3, m, p) + S_{9,4}(n-4, m, p) \\ &= S_{9,4}(n) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j \\ &\quad + 898 (S_{9,4}(n-1) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j) \\ &\quad - 898 (S_{9,4}(n-2) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j) \\ &\quad - (S_{9,4}(n-3) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j) \\ &\quad + (S_{9,4}(n-4) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j) \\ &= (S_{9,4}(n) + 898 S_{9,4}(n-1) - 898 S_{9,4}(n-2) - S_{9,4}(n-3) + S_{9,4}(n-4)) \\ &\quad + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j \\ &= S_{9,4}(n+1) + S_{9,4}(m)i + S_{9,4}(p)j. \end{aligned}$$

□

5 As relações t -dimensionais para os números multifigurados quadrados-nonagonais

Nesta seção, estabelece-se a generalização das relações recorrentes associadas aos números multifigurados quadrados-nonagonais para a dimensão t . Os casos bidimensional e tridimensional, desenvolvidos nas seções 3 e 4, respectivamente, são aqui tomados como base para a construção de uma formulação recorrente em dimensão arbitrária. Dessa forma, obtém-se um modelo unificado que engloba, como casos particulares, as estruturas previamente apresentadas.

Definição 14. *Seja $(r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_t) \in \mathbb{N}^t$, e considerando o conjunto de unidades imaginárias $\{i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_t\}$, as relações recorrentes t -dimensionais dos números multifigurados quadrados-*

nonagonais são definidas por:

$$\begin{aligned} S_{9,4}(r_1 + 1, r_2, r_3, \dots, r_t) &= S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t) + 898 S_{9,4}(r_1 - 1, r_2, r_3, \dots, r_t) \\ &\quad - 898 S_{9,4}(r_1 - 2, r_2, r_3, \dots, r_t) - S_{9,4}(r_1 - 3, r_2, r_3, \dots, r_t) \\ &\quad + S_{9,4}(r_1 - 4, r_2, r_3, \dots, r_t), \quad r_1 \geq 4, \quad r_2, \dots, r_t \geq 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(r_1, r_2 + 1, r_3, \dots, r_t) &= S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t) + 898 S_{9,4}(r_1, r_2 - 1, r_3, \dots, r_t) \\ &\quad - 898 S_{9,4}(r_1, r_2 - 2, r_3, \dots, r_t) - S_{9,4}(r_1, r_2 - 3, r_3, \dots, r_t) \\ &\quad + S_{9,4}(r_1, r_2 - 4, r_3, \dots, r_t), \quad r_2 \geq 4, \quad r_1, r_3, \dots, r_t \geq 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} S_{9,4}(r_1, r_2, r_3 + 1, \dots, r_t) &= S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t) + 898 S_{9,4}(r_1, r_2, r_3 - 1, \dots, r_t) \\ &\quad - 898 S_{9,4}(r_1, r_2, r_3 - 2, \dots, r_t) - S_{9,4}(r_1, r_2, r_3 - 3, \dots, r_t) \\ &\quad + S_{9,4}(r_1, r_2, r_3 - 4, \dots, r_t), \quad r_3 \geq 4, \quad r_1, r_2, r_4, \dots, r_t \geq 0, \end{aligned} \quad (31)$$

⋮

$$\begin{aligned} S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t + 1) &= S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t) + 898 S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t - 1) \\ &\quad - 898 S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t - 2) - S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t - 3) \\ &\quad + S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t - 4), \quad r_t \geq 4, \quad r_1, \dots, r_{t-1} \geq 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Com os seguintes valores iniciais

$$S_{9,4}(r_1, r_2, \dots, r_t) = v_{r_1}^2 + v_{r_2}^2 i_1 + v_{r_3}^2 i_2 + \dots + v_{r_t}^2 i_{t-1}, \quad 0 \leq r_1, r_2, \dots, r_t \leq 4,$$

onde $i_1^2 = i_2^2 = \dots = i_{t-1}^2 = -1$.

Em seguida, enunciamos um teorema que nos permite determinar uma expressão explícita para os números multifigurados quadrados-nonagonais t -dimensionais.

Teorema 15. Considerando $(r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_t) \in \mathbb{N}^t$, os números multifigurados quadrados-nonagonais t -dimensionais são descritos por

$$S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_t) = S_{9,4}(r_1) + S_{9,4}(r_2)i_1 + S_{9,4}(r_3)i_2 + S_{9,4}(r_4)i_3 + \dots + S_{9,4}(r_t)i_{t-1}.$$

Demonstração. Para todo termo ordenado de inteiros $(r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_t) \in \mathbb{N}^t$, fixa-se $r_s \geq 0, 2 \leq s \leq t$, utilizando a Recorrência (29) e assumindo por hipótese de indução que para algum r_1 , vale:

$$S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t) = S_{9,4}(r_1) + \sum_{s=2}^t S_{9,4}(r_s)i_{s-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{9,4}(r_1 + 1, r_2, r_3, \dots, r_t) &= S_{9,4}(r_1, r_2, r_3, \dots, r_t) + 898 S_{9,4}(r_1 - 1, r_2, r_3, \dots, r_t) \\ &\quad - 898 S_{9,4}(r_1 - 2, r_2, r_3, \dots, r_t) - S_{9,4}(r_1 - 3, r_2, r_3, \dots, r_t) \\ &\quad + S_{9,4}(r_1 - 4, r_2, r_3, \dots, r_t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,4}(r_1 + 1, r_2, r_3, \dots, r_t) &= S_{9,4}(r_1) + \sum_{s=2}^t S_{9,4}(r_s) i_{s-1} \\
 &\quad + 898 \left[S_{9,4}(r_1 - 1) + \sum_{s=2}^t S_{9,4}(r_s) i_{s-1} \right] \\
 &\quad - 898 \left[S_{9,4}(r_1 - 2) + \sum_{s=2}^t S_{9,4}(r_s) i_{s-1} \right] \\
 &\quad - \left[S_{9,4}(r_1 - 3) + \sum_{s=2}^t S_{9,4}(r_s) i_{s-1} \right] \\
 &\quad + \left[S_{9,4}(r_1 - 4) + \sum_{s=2}^t S_{9,4}(r_s) i_{s-1} \right] \\
 &= S_{9,4}(r_1 + 1) + \sum_{s=2}^t S_{9,4}(r_s) i_{s-1}.
 \end{aligned}$$

□

6 Conclusão

Este trabalho investigou a sequência dos números multifigurados quadrados-nonagonais, explorando o processo de complexificação por meio da introdução de unidades imaginárias e sua generalização algébrica para dimensões superiores. A partir do modelo unidimensional, foram desenvolvidas extensões bidimensionais, tridimensionais e t -dimensionais dessa sequência, acompanhadas de expressões explícitas que ampliam a compreensão estrutural dessa classe de números.

Os resultados obtidos abrem caminhos para novas investigações de outras sequências de números multifigurados, como, por exemplo, os quadrados-pentagonais, triangulares-hexagonais, estrela-quadrangulares e suas respectivas generalizações para dimensões superiores. Como perspectivas futuras, destaca-se a investigação de propriedades aritméticas da sequência dos números quadrados-nonagonais, tais como divisibilidade, formulação de matrizes para a sequência na forma bidimensional e, também, o estudo das intersecções entre novas classes de números figurados.

Agradecimentos

A terceira autora é membro do Polo de Investigação CMAT-UTAD - Polo inserido no Centro de Matemática (CMAT) da Universidade do Minho - e agradece à Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), através do Projeto UIDP/00013. O último autor expressa sua sincera gratidão ao Colegiado de Matemática da Universidade Federal do Tocantins (Arraias-Brasil) por seu valioso apoio.

Referências

- [1] EMIN, Ahmet. Some multi figurate numbers in terms of generalized fibonacci and lucas numbers. **The Aligarh Bulletin of Mathematics**, Aligarh, v. 42, n. 1, p. 107-123, 2023.

- [2] DEZA, E.; DEZA, M. M. **Figurate numbers**. Singapore: World Scientific, 2012.
- [3] BEZERRA, F. H. C.; ALVES, F. R. V.; COSTA, E. A.; BARROS, F. E. Uma nota sobre os números multfigurados quadrados-nonagonais. **Intermaths: revista de matemática aplicada e interdisciplinar, Vitória da Conquista**, v. 6, n. 1, p. 93-106, 2025.
- [4] ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C. Números triangulares-quadrados-pentagonais: relações n-dimensionais, função geradora e sequência de matrizes. **Revista RMAT**, Fortaleza, v. 2, n. 1, p. 1–15, jul. 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13147067>. Acesso em: 25 jun. 2025.
- [5] COSTA, E. A.; CATARINO, P. M. M. C.; VASCO, P. J. M.; ALVES, Francisco R. V. A brief study on the k-dimensional Repunit sequence. **Axioms**, Basel, v. 14, p. 1–16, jan. 2025. DOI <https://doi.org/10.3390/axioms14020109>. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2075-1680/14/2/109>. Acesso em: 25 jun. 2025.
- [6] BEZERRA, F. H. C.; ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M. Relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais de Narayana. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, 2020. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/207>. Acesso em: 25 jun. 2025.
- [7] MANGUEIRA, M. C. D. S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C.; SOUSA, R. O. Relações bi, tri e n-dimensionais de Mersenne. **Brazilian Electronic Journal of Mathematics**, Uberlândia, v. 4, p. 1–29, 2023. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/BEJOM/article/view/69300>. Acesso em: 25 jun. 2025.
- [8] UYGUN, Şükran. Complex Jacobsthal numbers in two dimension. **Sarajevo Journal of Mathematics**, Sarajevo, v. 20, n. 2 (33), p. 219–229, jan. 2024. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/390300390_COMPLEX_JACOBSTHAL_NUMBERS_IN_TWO_DIMENSION. Acesso em: 4 ago. 2025.
- [9] CATARINO, P. M. M. C.; SANTOS, D. C.; COSTA, E. A. On t-Dimensional Gersenne Sequences and Their Symmetry Properties. **Symmetry**, Basel, v. 17, n. 7, p. 1079, 2025. Disponível em <https://doi.org/10.3390/sym17071079>. Acesso em: 15 jan. 2026.
- [10] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Quaternions de Leonardo: uma abordagem para o ensino via Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas. **Revista Cocar**, Belém, v. 21, n. 39, p. 1–19, 2019. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/download/8629/3979/40261>. Acesso em: 1 set. 2025.
- [11] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Itabaiana, v. 4, n. 2, p. 156–173, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/11863>. Acesso em: 25 jun. 2025.
- [12] TAVARES, Daniela. As formas dos números. **Gazeta de Matemática**, Lisboa, n. 194, p. 10–13, 2021.

-
- [13] THE OEIS FOUNDATION. **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences**. Disponível em: <https://oeis.org>. Acesso em: 15 jan. 2026.
- [14] HARMAN, C. J. Complex Fibonacci numbers. **Fibonacci Quarterly**, Sun City, v. 19, n. 1, p. 82–86, 1981.