

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 27, 2026
Artigo de Pesquisa

Sérgio Antônio Costa de Sousa

Universidade Federal do Tocantins (UFT), Palmas, sergio-sousa555@gmail.com

Keidna Cristiane Oliveira Souza

Universidade Federal do Tocantins (UFT), Palmas

Élis Gardel da Costa Mesquita

Universidade Federal do Tocantins (UFT), Palmas

Função quadrática: a parábola vertical

Quadratic function: the vertical parabola

Resumo

Este artigo apresenta uma abordagem construtivista para o gráfico da função quadrática e suas propriedades, adequada para alunos em seu primeiro contato com o tema. Diferente de abordagens tradicionais, propõe-se uma sequência, inspirada na Geometria Analítica, que se inicia da análise da função $g(x) = ax^2$ e utiliza translações horizontais e verticais para construir a forma canônica geometricamente, motivando a sua dedução algébrica. Essa exploração de translações foi um dos fundamentos da posterior formalização de que o gráfico da função quadrática é uma parábola; para solidificar o conceito foram propostas duas atividades no *GeoGebra*, a primeira para visualização da definição geométrica e a segunda com objetivo de verificar, em um caso específico, que o gráfico da função coincide com o lugar geométrico (parábola). O objetivo principal do artigo é o enriquecimento conceitual para o aluno, contemplando da intuição à formalização rigorosa, focando em esclarecer e justificar as propriedades do gráfico da função quadrática, contribuindo para um aprendizado mais significativo.

Palavras-chave: função quadrática; parábola; simetria; GeoGebra; ensino de matemática.

Abstract

This article presents a constructivist approach to the graph of the quadratic function and its properties, suitable for students in their first contact with the subject. Unlike traditional approaches, a sequence inspired by Analytic Geometry is proposed, starting from the analysis of the function $g(x) = ax^2$ and using horizontal and vertical translations to construct the canonical form geometrically, motivating its algebraic deduction. This exploration of translations was one of the foundations for the subsequent formalization that the graph of the quadratic function is a parabola; to solidify the concept, two activities were proposed in *GeoGebra*, the first for visualizing the geometric definition and the second with the objective of verifying, in a specific case, that the graph of the function coincides with the geometric locus (parabola). The main objective of this article is the conceptual enrichment for the student, from intuition to rigorous formalization, focusing on clarifying and justifying the properties of the graph of the quadratic function, contributing to more meaningful learning.

Keywords: quadratic function; parabola; symmetry; GeoGebra; mathematics teaching.



1 Introdução

No currículo de matemática do Ensino Médio, a função quadrática, usualmente apresentada na forma padrão: $f(x) = ax^2 + bx + c$, é um tópico central. É comum que, ao apresentar o tema, os materiais didáticos se limitem a fazer a seguinte afirmação: “O gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola”. Exemplos dessa abordagem podem ser observados em [1] e [2], onde a curva é nomeada, mas não é definida e nenhum comentário adicional é feito sobre ela. Essa omissão tem a vantagem prática de simplificar a exposição e focar apenas na função quadrática.

Por outro lado, uma alternativa é demonstrar, a partir da definição geométrica, que a parábola é de fato o gráfico da função do 2º grau. Tal demonstração é apresentada em [3] e [4], formalizando o resultado de forma rigorosa. Entretanto, essa escolha pode ser inconveniente por adicionar conteúdos de Geometria Analítica para estudantes que ainda estão tendo o primeiro contato com o tema.

Como alternativa, alinhada com propostas que buscam a articulação entre diferentes registros de representação [5, 6], este artigo apresenta uma estratégia distinta, utilizando alguns conceitos da Geometria Analítica, tais como as translações horizontal e vertical, para introduzir, justificar e esclarecer as próprias propriedades da função.

Nesse sentido, o texto seguirá uma sequência construtivista, iniciando a Seção 2 com uma análise puramente algébrica da função $g(x) = ax^2$, para na sequência abordar suas formas trasladadas ($h(x) = a(x - m)^2$, $v(x) = g(x) + k$ e $f(x) = a(x - m)^2 + k$) e suas propriedades, de modo a motivar a escrita da forma polinomial $f(x) = ax^2 + bx + c$ na forma canônica $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

2 Construindo a parábola: das translações à forma canônica

O objetivo desta seção é construir a forma canônica a partir de transformações geométricas. Para isso, primeiro analisaremos, na Subseção 2.1, as propriedades algébricas de $g(x) = ax^2$ e suas implicações gráficas. Em seguida, na Subseção 2.2, aplicaremos a translação horizontal e a translação vertical a esse gráfico para obter a forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$. Essa construção culminará, na Subseção 2.3, na demonstração de que toda função quadrática (na forma $ax^2 + bx + c$) pode ser escrita na forma canônica.

Antes de desenvolver essa construção, vale destacar por que adotaremos esse caminho. Normalmente, o estudo das funções quadráticas é feito a partir da forma canônica, deduzida diretamente da forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$. Entretanto, uma abordagem mais intuitiva é primeiro construir geometricamente a forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$ discutindo suas propriedades. Isso faz com que a dedução algébrica, quando introduzida em seguida, seja previamente justificada e compreendida com mais naturalidade.

2.1 A função $g(x) = ax^2$

Nesta subseção iniciaremos nossa abordagem construtivista, inspirada na Geometria Analítica, a partir do caso mais simples: a função $g(x) = ax^2$, explorando suas propriedades por meio da análise algébrica.

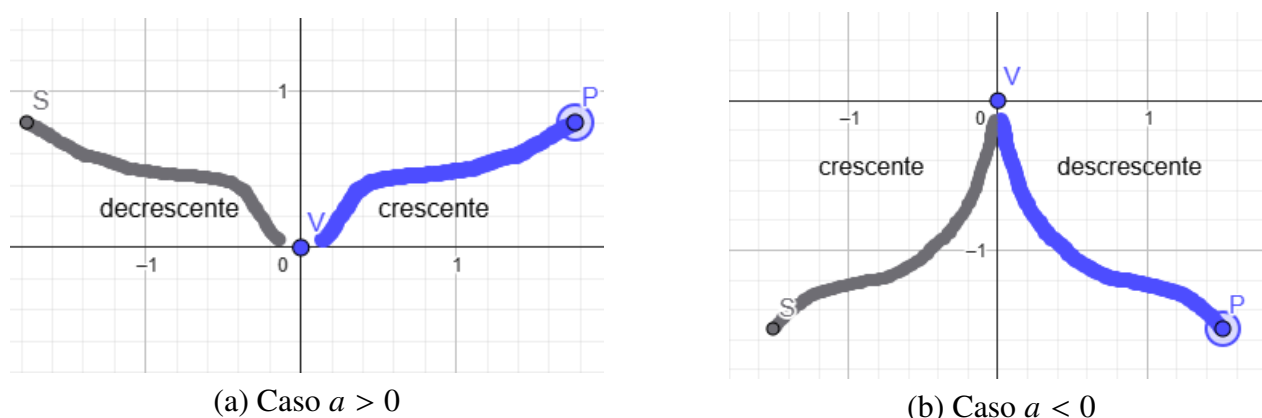
Seja $g(x) = ax^2$, com $a, x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Algebricamente, podemos notar que esta função tem as seguintes propriedades (sem assumir qualquer conhecimento prévio sobre o seu gráfico):

- **O papel do coeficiente a :** Sabemos que $x^2 \geq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Portanto, se $a > 0$, então $g(x) \geq 0$ e se $a < 0$, então $g(x) \leq 0$.

- **Valor mínimo:** Se $a > 0$, então a função possui um **valor mínimo**, que é 0 (pois $g(x) \geq 0$). Este valor é atingido quando $x = 0$. Geometricamente, isso nos diz duas coisas: todo o gráfico se situa no semiplano superior (acima ou sobre o eixo x), ou seja, no 1º e 2º quadrantes e o ponto $(0, 0)$ é o ponto mais **baixo** do gráfico da função, denominado **vértice**.
- **Valor máximo:** De forma análoga ao item anterior, se $a < 0$, então a função possui um **valor máximo**, que é 0. Este valor é atingido quando $x = 0$. Além disso, todo o gráfico se situa no semiplano inferior (abaixo ou sobre o eixo x), ou seja, no 3º e 4º quadrantes e o ponto $(0, 0)$ é o ponto mais **alto** do gráfico da função, também chamado de **vértice**.
- **Simetria:** $g(x)$ é uma função par, ou seja, $g(x) = g(-x)$ para todo x . Então, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y .
- **Crescimento e decrescimento:** O comportamento do gráfico da função, que se altera no vértice, pode ser deduzido algebricamente e pela simetria. Para $a > 0$, se tomarmos $0 \leq x_1 < x_2$, teremos $x_1^2 < x_2^2$; multiplicando por a (positivo), obtemos $g(x_1) < g(x_2)$, o que justifica o crescimento para $x \geq 0$ (1º quadrante). Logo, devido à simetria em relação ao eixo y , ela deve ser decrescente para $x < 0$ (2º quadrante). O comportamento se inverte quando $a < 0$ e a demonstração é análoga.

Com base nas propriedades algébricas deduzidas, podemos esboçar um gráfico que satisfaça todas as condições: um ponto de extremo no vértice $(0,0)$, simetria em relação ao eixo y e os respectivos comportamentos de crescimento e decrescimento. Com essa perspectiva, observe, na Figura 1, o vértice na origem, a simetria e os intervalos de crescimento e decrescimento para os casos (a) e (b), que ilustram dois possíveis esboços para o gráfico da função obtidos a partir do rastro de pontos simétricos.

Figura 1: Esboços de gráficos genéricos gerados a partir das propriedades deduzidas.



Fonte: Elaborado pelos autores. As construções interativas estão disponíveis, respectivamente, [aqui](#) e [aqui](#).

Observação 1 (sugestão pedagógica) A construção interativa no GeoGebra possibilita uma exploração criativa da simetria. Pode-se propor aos alunos que desenhem uma figura qualquer em um dos lados do eixo y (por exemplo, as metades direitas de um boneco ou de uma árvore de natal). Eles observarão a outra metade ser desenhada simultaneamente, reforçando a noção de simetria de forma lúdica e concreta. Esta atividade serve como uma excelente introdução à ideia de que o gráfico da

função em estudo também possui um “lado esquerdo” e um “lado direito”, divididos por um eixo de simetria. Essa estratégia de utilizar a construção de figuras artísticas para estudar propriedades de funções quadráticas também foi feita por Rocha *et al.* [6], que propôs a construção de um “carrinho com rodas” envolvendo os conceitos de simetria e translação.

2.2 Movimentando o gráfico: translações no plano

O que acontece se movimentarmos o gráfico com vértice na origem para outro local? O que teríamos que modificar na função $g(x) = ax^2$ para ter esse efeito? Nesta seção, apresentaremos como as translações mudam a posição do vértice do gráfico da função $g(x) = ax^2$ e, conseqüentemente, movimentam todo o gráfico no plano.

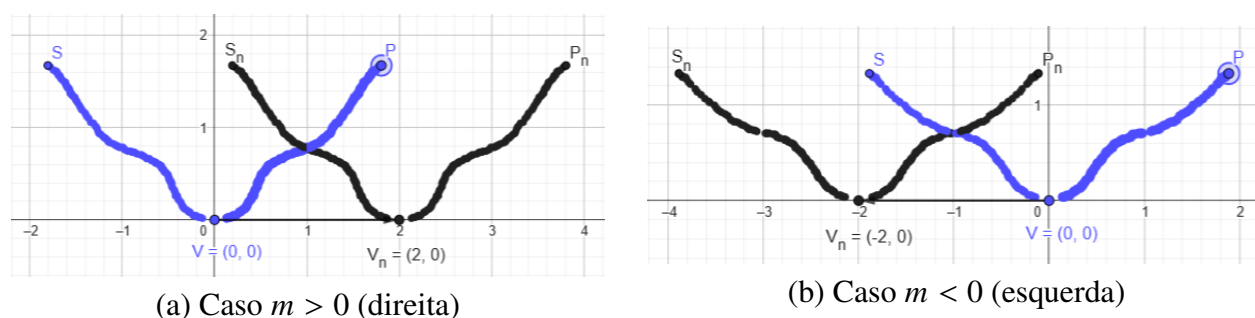
2.2.1 Translação horizontal

Iniciemos nossa investigação com o movimento horizontal. Qual alteração na fórmula de $g(x) = ax^2$ faria o vértice se mover de $(0, 0)$ para um novo ponto $(m, 0)$ no eixo x ? Em $g(x) = ax^2$, o mínimo ou máximo da função ocorre quando $x = 0$. De forma análoga, o valor extremo da nova função com vértice em $(m, 0)$ deve ocorrer em $x = m$, ou seja, neste ponto o termo quadrático deve se anular. A expressão $(x - m)^2$ cumpre exatamente este papel.

Isso nos leva a definir a nova função como $h(x) = a(x - m)^2$. De fato, ao substituir x por $(x - m)$, provocamos uma translação horizontal no gráfico de $g(x) = ax^2$. O gráfico é deslocado em $|m|$ unidades: se $m > 0$, o deslocamento é para a direita; se $m < 0$, para a esquerda, conforme ilustrado na Figura 2. As propriedades da nova função são:

- **Vértice:** O vértice se move de $(0, 0)$ para $(m, 0)$.
- **Eixo de simetria:** O eixo de simetria se desloca de $x = 0$ para a reta vertical $x = m$.
- **Valor máximo/mínimo:** Permanece inalterado, continuando a ser 0.

Figura 2: Translação horizontal do gráfico de $g(x) = ax^2$ (em azul) para o gráfico de $h(x) = a(x - m)^2$ (em preto).



Fonte: Elaborado pelos autores. A construção interativa está disponível aqui.

2.2.2 Translação vertical

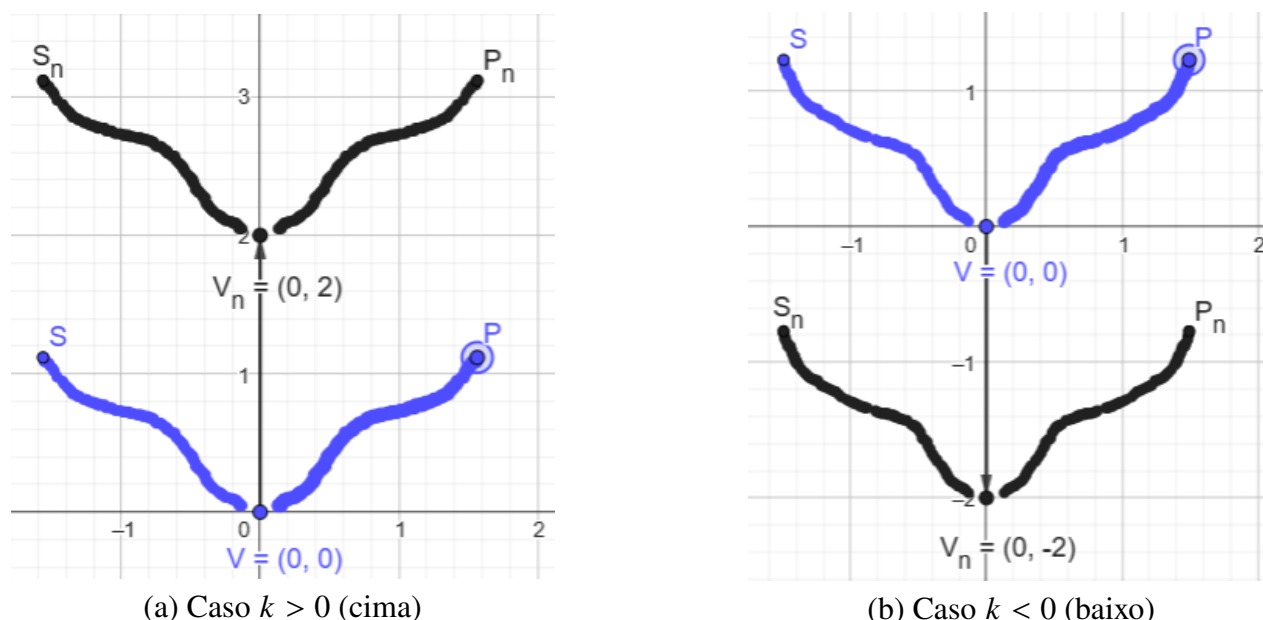
Seguindo a mesma linha de raciocínio, como podemos alterar a função $g(x) = ax^2$ para deslocar seu vértice de $(0, 0)$ para um ponto $(0, k)$ no eixo y ? Na função original, o valor mínimo ou máximo

é $g(0) = 0$ e na nova função deve ser k . Então, para conseguir isso, sem alterar a forma do gráfico da função, temos que adicionar a constante k à função $g(x) = ax^2$.

Desta forma, definimos a nova função como $v(x) = g(x) + k$, ou seja, $v(x) = ax^2 + k$. Esta adição provoca uma translação vertical no gráfico de $g(x) = ax^2$, deslocando-o em $|k|$ unidades: para cima se $k > 0$ e para baixo se $k < 0$, como mostra a Figura 3. As propriedades resultantes são:

- **Vértice:** O vértice se move de $(0, 0)$ para $(0, k)$.
- **Eixo de simetria:** Permanece inalterado no eixo y ($x = 0$).
- **Valor máximo/mínimo:** O valor extremo da função passa de 0 para k .

Figura 3: Translação vertical do gráfico de $g(x) = ax^2$ (em azul) para o gráfico de $v(x) = ax^2 + k$ (em preto).



Fonte: Elaborado pelos autores. A construção interativa está disponível aqui.

2.2.3 Combinando as translações

Agora que sabemos como mover o gráfico horizontalmente, alterando o vértice para $(m, 0)$, e verticalmente, com o vértice em $(0, k)$, a próxima pergunta natural é: como podemos alterar a função $g(x) = ax^2$ para deslocar seu vértice para um ponto arbitrário (m, k) no plano?

Sabemos que:

- Para deslocar o vértice horizontalmente para $x = m$, vimos que precisamos da expressão $(x - m)^2$.
- Para deslocar o vértice verticalmente para $y = k$, vimos que precisamos adicionar a constante k à função.

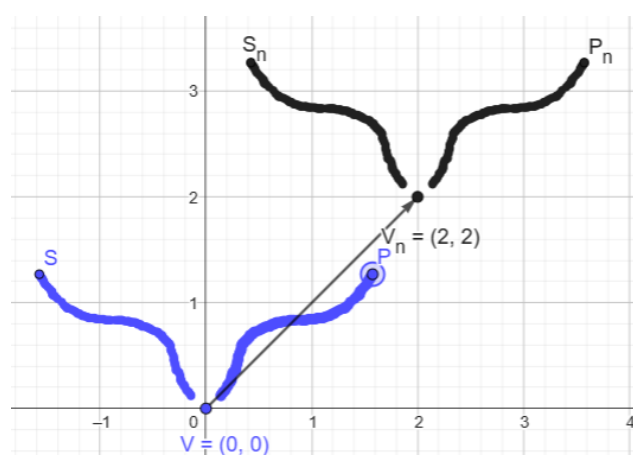
Então, basta **combinar** essas duas transformações, obtendo:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k \quad (1)$$

A Relação (1) é a expressão geral da função cujo gráfico possui vértice em (m, k) e representa a função original $g(x) = ax^2$ após ser transladada m unidades na horizontal e k unidades na vertical. Como uma consequência direta das transformações (ver Figura 4), suas propriedades são:

- **Vértice:** O vértice do gráfico da nova função está em (m, k) .
- **Eixo de simetria:** A reta vertical $x = m$.
- **Valor máximo/mínimo:** O valor extremo é k .

Figura 4: Gráfico da função $g(x) = ax^2$ (em azul) e o gráfico da função transladada $f(x) = a(x - m)^2 + k$ (em preto).



Fonte: Elaborado pelos autores. A construção interativa está disponível aqui.

2.3 Da forma polinomial à forma canônica

Nas seções anteriores, construímos a relação $f(x) = a(x - m)^2 + k$, com vértice em (m, k) , mostrada na Relação (1). O gráfico desta função é uma translação horizontal e vertical do gráfico de $g(x) = ax^2$. Isso nos leva a uma pergunta fundamental: será que *toda* função quadrática, dada na sua forma polinomial $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode ser reescrita nessa forma?

Para investigar isso, vamos partir da expressão que construímos e expandi-la algebricamente:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - m)^2 + k \\ &= a(x^2 - 2mx + m^2) + k \\ &= ax^2 - (2am)x + (am^2 + k) \end{aligned}$$

Agora, podemos comparar esta expressão expandida com a forma polinomial $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para que os dois polinômios sejam iguais, os coeficientes de cada termo correspondente devem ser iguais.

Comparando $ax^2 + bx + c$ com $ax^2 - (2am)x + (am^2 + k)$, notamos que os coeficientes dos termos quadráticos são idênticos. Igualando os coeficientes restantes, obtemos o seguinte sistema de equações:

- **Coefficiente de x^1 :** $b = -2am$.

- **Termo constante** (x^0): $c = am^2 + k$.

Agora, podemos resolver este sistema para encontrar m e k em termos dos coeficientes a , b e c . Da primeira equação, isolamos m :

$$m = -\frac{b}{2a}$$

Substituindo este valor de m na segunda equação, podemos isolar k :

$$k = c - am^2 = c - a \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - a \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Definindo $\Delta = b^2 - 4ac$, chegamos a:

$$k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Este resultado é a resposta para nossa investigação: **Sim**, toda função quadrática pode ser escrita na forma da Relação (1). De fato, como os valores de m e k foram determinados pela igualdade dos coeficientes de dois polinômios quadráticos, a equivalência algébrica entre eles está garantida. Portanto, para qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, ao substituirmos $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$, podemos reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x - m)^2 + k, \text{ com } m = -\frac{b}{2a} \text{ e } k = -\frac{\Delta}{4a} \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{aligned} \quad (2)$$

Isso demonstra que o gráfico de toda função quadrática é uma translação do gráfico da função $g(x) = ax^2$. A Relação (2) é conhecida como a **forma canônica** da função quadrática e revela imediatamente suas propriedades geométricas (vértice, eixo de simetria, valor extremo). De fato, as propriedades da função do 2º grau, agora evidentes a partir de sua forma canônica, são:

- **Vértice:** $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- **Eixo de simetria:** A reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$.
- **Valor máximo/mínimo:** O valor extremo é $-\frac{\Delta}{4a}$.

3 A parábola como lugar geométrico

Na seção anterior vimos que:

- O gráfico da função $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é uma translação do gráfico de $g(x) = ax^2$.
- Toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$.
- Concluindo que o gráfico de toda função quadrática é uma translação do gráfico de $g(x) = ax^2$.

Agora que o comportamento gráfico das funções quadráticas foi estabelecido, faremos uma pausa nessa abordagem. Introduziremos o lugar geométrico conhecido como “parábola”, definindo-o a partir de suas propriedades geométricas, sem qualquer referência inicial a funções. O objetivo é investigar essa curva de forma independente para, na seção seguinte, conectá-la ao nosso estudo sobre funções.

3.1 Definição: foco, diretriz e vértice

A parábola é um lugar geométrico definido da seguinte forma:

Definição 2 *Dados um ponto fixo F (chamado **foco**) e uma reta d (chamada **diretriz**) que não contém F , a **parábola** é o conjunto de todos os pontos P no plano que são equidistantes do foco F e da diretriz d .*

Ou seja, a parábola é o conjunto de pontos P que satisfazem a condição $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$. O ponto médio entre o foco e o pé da perpendicular à diretriz pelo foco, que por definição pertence à curva, é chamado de **vértice** (V). A reta que passa pelo foco e pelo vértice (sendo perpendicular à diretriz) é o **eixo de simetria** da parábola.

É importante ressaltar o propósito de cada etapa construída até aqui. A abordagem construtivista realizada na Seção 2 teve o objetivo didático de familiarizar o estudante com as propriedades da curva. Contudo, aquelas características (simetria, extremos e crescimento/decrescimento) são condições necessárias, mas não suficientes para garantir o formato exclusivo da parábola, uma vez que admitem outros traçados.

Por outro lado, a definição em termos de lugar geométrico é matematicamente exata e define a curva de forma única, entretanto, não evidencia de imediato o “formato” visual da curva (o característico traçado em forma de “U” ou “U” invertido). Assim, faz-se necessária uma ilustração gráfica.

Neste sentido, as atividades propostas na Seção 5 têm o objetivo de mostrar, de forma concreta e visual, o formato do gráfico da função, e a conexão da definição algébrica da função com a definição geométrica da parábola.

Além disso, destacamos que após a definição da parábola, antes mesmo das atividades, é recomendado explorar dinamicamente o traçado desse lugar geométrico por meio de construções no *GeoGebra* (uma construção que pode ser utilizada com esse fim foi mencionada no final da Subseção 5.1) em conjunto com imagens ilustrativas do formato visual da parábola (conforme ilustrado na Figura 5).

3.2 A equação da parábola vertical com vértice na origem

Agora vamos utilizar a definição geométrica da parábola para encontrar sua expressão algébrica para um caso mais simples. Gostaríamos que este caso fosse semelhante a $g(x) = ax^2$. Assim, vamos considerar o vértice V na origem $(0, 0)$ do plano e eixo de simetria vertical (parábola vertical). Dessa forma,

- O vértice está em $V = (0, 0)$.
- A distância do vértice ao foco denominaremos de **parâmetro** p ($p > 0$).
- Como o vértice é o ponto médio, o **foco** poderá estar em $F = (0, p)$ ou $F = (0, -p)$.

Figura 5: Ilustração do formato visual da parábola e seus respectivos elementos geométricos.



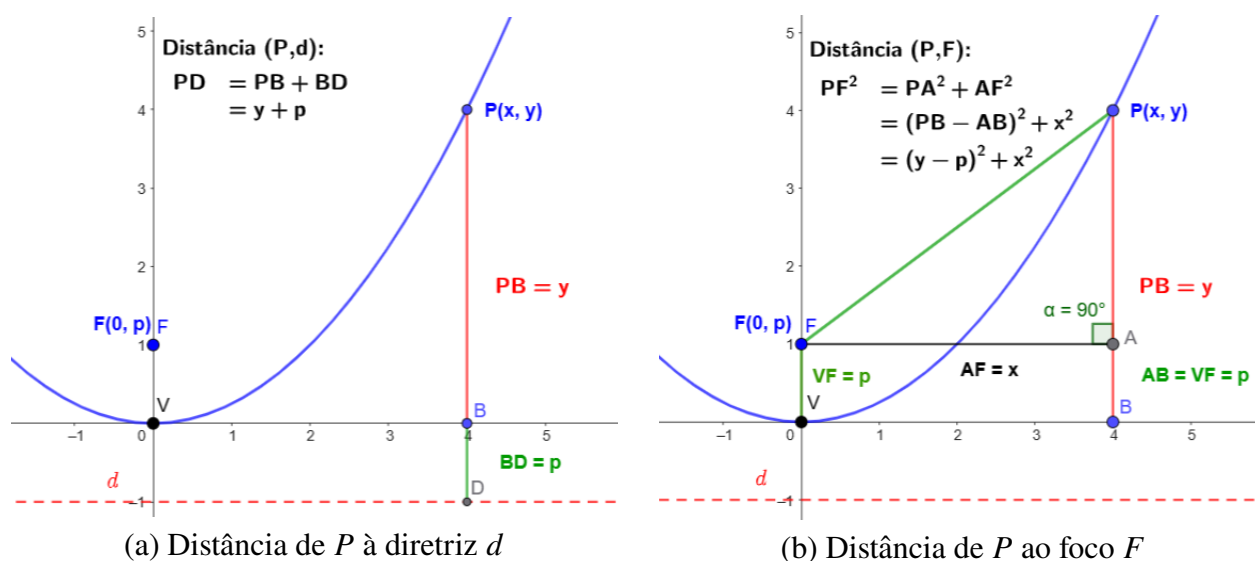
Fonte: Elaborado pelos autores. A construção interativa está disponível aqui.

- A reta **diretriz** d , por estar a uma distância p do vértice no sentido oposto ao foco, será a reta horizontal $y = -p$ ou $y = p$.

Vamos deduzir a equação para o caso com foco $F = (0, p)$ e reta diretriz $y = -p$, ou seja, o caso em que o foco está acima da diretriz. Assim, tomando um ponto genérico $P = (x, y)$ que pertence à parábola. De acordo com a Definição 2, a distância de P a F deve ser igual à distância de P a d . Assim, calculando as duas distâncias, conforme ilustrado na Figura 6:

1. **Distância de P à diretriz d :** Como d é a reta horizontal $y = -p$, a distância perpendicular de $P(x, y)$ até d é simplesmente a diferença vertical: $\text{dist}(P, d) = y - (-p) = y + p$.
2. **Distância de P ao foco F :** Usamos o Teorema de Pitágoras para encontrar a distância entre $P(x, y)$ e $F(0, p)$. Os catetos do triângulo retângulo são a diferença horizontal $(x - 0) = x$ e a diferença vertical $(y - p)$. Então, $\text{dist}(P, F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (p - y)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$.

Figura 6: Ilustração geométrica para a dedução da equação da parábola. Em (a), a visualização da distância vertical de P à diretriz. Em (b), o triângulo retângulo formado para o cálculo da distância de P ao foco via Teorema de Pitágoras.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Agora, basta igualar as duas distâncias, $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d)$, para encontrar a equação da curva. Como a parábola está acima da reta diretriz, sabemos que $y \geq -p$, o que garante que $y + p \geq 0$. Assim, podemos elevar ambos os lados ao quadrado mantendo a equivalência:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y - p)^2} &= y + p \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - p)^2 &= (y + p)^2, \text{ pois } y + p \geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4py \end{aligned}$$

Isolando y , obtemos a equação da parábola vertical com vértice na origem e foco acima da reta diretriz:

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \quad (3)$$

O caso em que o vértice está na origem e o foco está abaixo do vértice, ou seja, $F = (0, -p)$ e reta diretriz $y = p$, foi demonstrado em [7]. A demonstração desse caso é análoga à anterior e tem a seguinte equação:

$$y = -\frac{1}{4p}x^2 \quad (4)$$

4 O gráfico da função quadrática é uma parábola

Nas seções anteriores, estabelecemos dois fatos fundamentais de perspectivas distintas:

- **Perspectiva da função (Seção 2):** O gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma translação do gráfico da função $g(x) = ax^2$.

- **Perspectiva da Geometria Analítica (Seção 3):** A parábola, definida como um lugar geométrico, para o caso do vértice na origem e eixo de simetria vertical é definida algebricamente por (3), $y = \frac{1}{4p}x^2$, quando o foco está acima da reta diretriz e por (4), $y = -\frac{1}{4p}x^2$, quando o foco está abaixo da reta diretriz.

Nesta seção, uniremos essas duas perspectivas para provar formalmente que o gráfico da função quadrática é, de fato, uma parábola.

4.1 A conexão fundamental

Nesta subseção vamos fazer a conexão entre a forma mais simples da função quadrática, e as Equações (3) e (4), que são as equações geométricas da parábola vertical com vértice na origem apresentadas no final da seção anterior. Note que as três relações são quadráticas. Além disso, como $p > 0$, então na Equação (3) o coeficiente quadrático é sempre positivo e na Equação (4) o coeficiente quadrático é sempre negativo. Portanto, temos dois casos:

- **Caso $a > 0$ (concavidade para cima):** A função $g(x) = ax^2$ deve corresponder à equação geométrica $y = \frac{1}{4p}x^2$. Comparando os coeficientes:

$$a = \frac{1}{4p} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{4a}$$

- **Caso $a < 0$ (concavidade para baixo):** A função $g(x) = ax^2$ deve corresponder à equação geométrica $y = -\frac{1}{4p}x^2$. Como a é negativo, então:

$$a = -\frac{1}{4p} \quad \Leftrightarrow \quad p = -\frac{1}{4a}$$

Podemos unificar esses resultados em uma única relação:

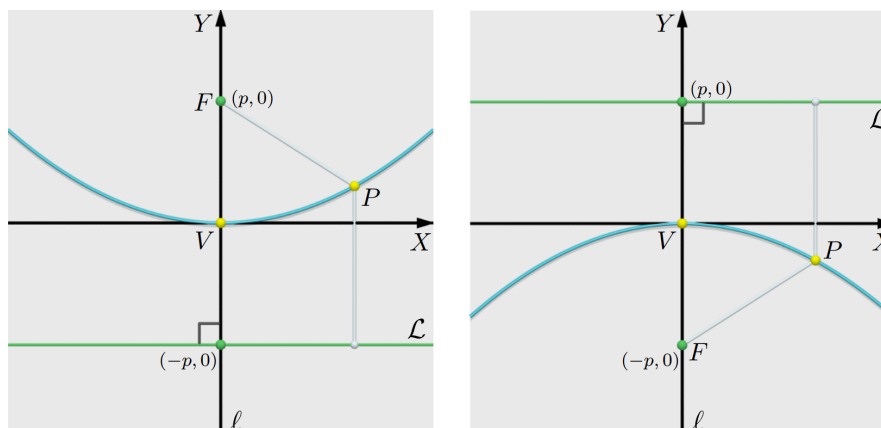
$$p = \frac{1}{4|a|} \quad (5)$$

Esta relação conecta a álgebra e a geometria: o valor absoluto de a determina a distância focal p , enquanto o sinal de a determina a orientação da concavidade (para cima ou para baixo), **determinando** as posições do foco e da reta diretriz em relação ao vértice, conforme ilustrado na Figura 7.

Portanto, o gráfico da função $g(x) = ax^2$ é uma parábola com:

- **Vértice:** $(0, 0)$
- **Foco:** $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ (quando $a > 0$ o foco está acima do vértice e para $a < 0$ o foco está abaixo).
- **Diretriz:** $y = -\frac{1}{4a}$ (quando $a > 0$ a diretriz está abaixo do vértice e para $a < 0$ a diretriz está acima).

Figura 7: Parábolas com vértice na origem.



Fonte: Adaptado de [7]. À esquerda: foco acima da diretriz ($a > 0$).

À direita: foco abaixo da diretriz ($a < 0$).

4.2 Generalização por translação

Com a conexão fundamental estabelecida, a prova final segue os seguintes passos:

1. **Passo 1:** Na Subseção 4.1, provamos que o gráfico da função $g(x) = ax^2$ é uma parábola.
2. **Passo 2:** No final da Subseção 2.3, concluímos que o gráfico de toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma translação do gráfico da função $g(x) = ax^2$.
3. **Passo 3:** Uma translação é um movimento rígido que desloca todos os pontos de um objeto, mas não altera sua forma, tipo ou propriedades geométricas intrínsecas.

Assim, temos o seguinte corolário:

Corolário 3 (conclusão) *O gráfico de toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola.*

Esta parábola terá o mesmo formato e a mesma distância focal $p = 1/4|a|$ da parábola $g(x) = ax^2$, estando apenas transladada para um novo vértice $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, com foco $F = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz horizontal $y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$. Observe que a recíproca do Corolário 3 não é verdadeira pois toda função quadrática tem gráfico definido por retas diretrizes horizontais, enquanto as parábolas também podem ser definidas por retas diretrizes com outras inclinações (verticais e inclinadas).

Observação 4 (interpretação por mudança de coordenadas) *É possível também visualizar esta conclusão através de uma mudança de coordenadas. Seja a forma canônica da função (Relação (2)):*

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Definindo $m = -b/2a$ e $k = -\Delta/4a$, temos $y = a(x - m)^2 + k$. Seja um novo sistema de coordenadas XY com origem no vértice $V = (m, k)$, tal que:

$$X = x - m, \quad Y = y - k$$

No sistema XY , a equação $y = a(x - m)^2 + k \Leftrightarrow y - k = a(x - m)^2$ torna-se:

$$Y = aX^2$$

Esta é a equação de uma parábola com vértice na origem do sistema XY . Como a mudança de coordenadas por translação preserva a geometria, isto fornece uma demonstração alternativa elegante de que o gráfico é uma parábola.

5 Proposta de atividades

Nesta seção, apresentamos um material didático dividido em duas atividades complementares que utilizam os resultados teóricos desenvolvidos para conectar a álgebra da sala de aula com a geometria dinâmica. Na primeira atividade o objetivo é que o estudante faça a construção geométrica da parábola de forma independente e, em seguida, na Atividade 2, aplique esse conhecimento para verificar de forma prática que o gráfico da função quadrática é, de fato, esse mesmo lugar geométrico.

5.1 Atividade prática 1: o simulador de parábolas

O objetivo desta primeira atividade é construir uma “máquina” no *GeoGebra* capaz de desenhar a parábola a partir da definição de equidistância. Para manter a construção acessível e focada na conexão com a função quadrática, construiremos o caso fundamental: diretriz horizontal e concavidade voltada para cima. Utilizaremos círculos e retas paralelas para representar as distâncias iguais da definição geométrica da parábola de forma mais intuitiva e simples.

5.1.1 Atividade prática

Objetivo: Criar uma construção dinâmica onde se possa alterar a posição da reta diretriz (horizontal) e do foco (acima da reta diretriz) e observar a curva gerada.

Roteiro para o aluno:

Passo 1: definindo a diretriz móvel.

1. Crie um *Controle Deslizante* e nomeie-o como k . Defina o intervalo de -5 a 5.
2. No campo de entrada, digite $d: y = k$.
3. Mova o slider k e observe que uma reta horizontal (a reta diretriz) sobe e desce na tela.

Passo 2: definindo o foco livre.

1. Selecione a ferramenta *Ponto* e clique em qualquer lugar acima da reta d . Renomeie este ponto para F .

Passo 3: a lógica da construção (raio = distância).

Para encontrar os pontos da parábola, precisamos de pontos cuja distância ao foco seja igual à distância à diretriz. Vamos chamar essa distância de r .

1. Crie um segundo *Controle Deslizante* chamado r (raio). Defina o mínimo como 0 e o máximo como 10.

2. **Distância ao foco:** Construa um círculo com centro em F e raio r (ferramenta “Círculo: Centro e Raio”).
3. **Distância à diretriz:** Como queremos pontos que estejam a uma altura r da diretriz (para cima), a reta auxiliar será $y = k + r$. Digite essa equação na entrada.
4. **Interseção:** Marque os pontos onde o círculo encontra a reta auxiliar criada. Renomeie-os para P_1 e P_2 e altere a cor deles para azul ou outra cor de sua preferência.

Passo 4: “pintando” a curva.

1. Clique com o botão direito nos pontos P_1 e P_2 e ative o “**Habilitar Rastro**”.
2. Mova o slider r lentamente. O rastro do movimento dos pontos desenhará a parábola.
3. *Experimentação:* Limpe os rastros (Ctrl+F), mova o ponto F (ainda acima de d) ou o slider k para uma nova posição e desenhe novamente.

Comentários ao professor: Esta atividade mostra visualmente que a parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes ao ponto F e a reta d . É importante destacar aos estudantes que realizamos aqui uma construção específica para o caso em que o foco está acima da diretriz, gerando uma parábola com concavidade para cima.

- Se desejássemos uma parábola com concavidade para baixo, o foco deveria estar abaixo da diretriz horizontal e a reta auxiliar seria $y = k - r$. Na Subseção 4.1 mostrou-se que a representação algébrica das parábolas com reta diretriz horizontal é equivalente à função quadrática, inclusive conforme a Subseção 4.2, toda função quadrática tem reta diretriz horizontal $y = -\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}$. Já, na construção que acabamos de fazer, vimos que as parábolas de diretriz horizontal são verticais. Assim, concluímos que a função quadrática é um caso específico da parábola: **a parábola vertical**.
- Para a parábola em geral, incluindo os casos em que não são funções quadráticas, pode ser explorada a ferramenta nativa “parábola” do *GeoGebra* que solicita apenas o foco e a diretriz como entrada (sem restrições). Assim poderão ser exploradas parábolas verticais, horizontais e inclinadas, a depender da inclinação da reta diretriz, mostrando assim a relação do foco e da diretriz com as parábolas. Além disso, o gráfico das parábolas verticais e inclinadas é uma forma visual de mostrar que essas parábolas não são funções quadráticas, pois basta fazer o teste das retas verticais para verificar que nem funções são.

Nota sobre outras construções: Existem outras abordagens geométricas ricas para a sala de aula. Sousa e Alves [8], por exemplo, apresentam construções da parábola utilizando dobraduras de papel (origami) e circunferências tangentes. Na abordagem por circunferências proposta pelos autores, a parábola é visualizada como o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam pelo foco e são tangentes à reta diretriz. Essa visualização alternativa complementa a compreensão do aluno sobre a natureza dinâmica da curva e recomendamos ela para ilustração da definição da parábola. A construção citada pode ser acessada aqui.

5.2 Atividade 2: a parábola de uma função quadrática

Na Atividade 1, Subseção 5.1, construímos um simulador de parábolas a partir do seus elementos geométricos, a saber, o foco e a reta diretriz. Na Atividade 2, determinaremos os elementos geométricos de uma função quadrática e criaremos dois gráficos: o primeiro no simulador a partir dos elementos geométricos e outro feito de forma direta no *GeoGebra* a partir da forma polinomial da função. O objetivo é verificar se os dois gráficos coincidem de fato.

5.2.1 Exemplo resolvido

Antes de propor a atividade, vamos resolver um exemplo para a parte teórica. Considere a função $f(x) = x^2 - 2x$. Para inseri-la no simulador, precisamos encontrar os elementos geométricos da parábola (foco e reta diretriz). A partir dos coeficientes podemos fazer da seguinte forma:

Resolução:

- **Coeficientes:** $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$.

- **1. Vértice (V):**

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1; \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4} = -1 \quad \Rightarrow V(1, -1)$$

- **2. Parâmetro (p):** A distância focal é dada por $p = \frac{1}{4a}$.

$$p = \frac{1}{4(1)} = 0,25$$

- **3. Foco (F) e diretriz (d):** Como $a > 0$, o foco está p unidades *acima* do vértice e a diretriz p unidades *abaixo*:

$$F = (x_v, y_v + p) = (1, -1 + 0,25) = (1, -0,75)$$

$$d : y = y_v - p = -1 - 0,25 = -1,25$$

Com esses dados (F e d), poderíamos configurar nosso simulador.

5.2.2 Parte 1: cálculo dos elementos da parábola

Objetivo: Calcular os elementos geométricos da parábola da função.

Atividade: Considere a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Realize os cálculos a seguir em seu caderno:

- Identifique os coeficientes a , b e c .
- Calcule as coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$.
- Determine o valor do parâmetro p utilizando a relação $p = 1/4a$.
- Com base no vértice e no parâmetro p , determine as coordenadas do foco F e a equação da reta diretriz d .



5.2.3 Parte 2: verificação geométrica no GeoGebra

Objetivo: Gerar um gráfico com a forma polinomial da função. Depois, utilizar os dados calculados na Parte 1 para gerar um gráfico no simulador de parábolas. Após isso, verificar se os gráficos coincidem.

Roteiro para o aluno:

1. **Gráfico da forma polinomial:** Sem apagar a construção da Atividade 1, digite a função alvo: $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. Configure este gráfico com cor cinza claro e estilo pontilhado para servir de referência.
3. **Inserindo os dados:** Ajuste o simulador com os valores que você calculou na Parte 1:
 - Digite na caixa do slider da diretriz: $k = [\text{seu valor calculado}]$.
 - Altere as coordenadas do ponto F para os valores que você encontrou: $F = (x, y)$.
4. **A prova final:** Mude a cor dos pontos de interseção (P_1, P_2) para vermelho. Mova o slider de raio (r) e observe o rastro.
5. **Conclusão:** O lugar geométrico desenhado coincide com o gráfico da função $f(x)$?

Gabarito e comentários ao professor: Para a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ da atividade proposta:

- **Gabarito da Parte 1:** a) $a = 1, b = -4, c = 3$; b) $V(2, -1)$; c) $p = 0, 25$; d) $F(2, -0, 75)$ e diretriz $y = -1, 25$.
- **Discussão da Parte 2:** O rastro deve coincidir perfeitamente. Esta atividade fecha o ciclo didático mostrando visualmente que a expressão $y = ax^2 + bx + c$ é apenas a representação algébrica da parábola vertical (que é um caso específico da parábola). Assim, o gráfico de uma função quadrática é uma parábola com foco e reta diretriz determinados pelos coeficientes da função.

6 Considerações finais

Neste trabalho, propusemos uma **sequência construtivista** alternativa sobre o gráfico da função quadrática e suas propriedades, adequada para alunos em seu primeiro contato com o tema. Partimos do caso mais simples $g(x) = ax^2$, deduzindo suas propriedades de forma algébrica. Na sequência, foram abordadas suas formas transladadas: $h(x) = a(x - m)^2$ referente à translação horizontal; $v(x) = g(x) + k$ referente à translação vertical; e a forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$, combinação das duas anteriores, que mantém propriedades semelhantes ao caso mais simples. Assim, a escrita da forma polinomial da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ na forma canônica $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ foi feita de forma previamente motivada, pois suas propriedades, incluindo as geométricas, já haviam sido abordadas.

O objetivo central foi construir o conhecimento de forma progressiva, partindo de conceitos intuitivos e formalizando matematicamente de forma acessível. Nesse sentido, destacamos que a forma canônica não foi deduzida por completamento de quadrados, e sim pela comparação de coeficientes, aproveitando o fato de que a forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$ já tinha sido construída geometricamente. Além disso, as propriedades (vértice, valor extremo e simetria) foram apresentadas e discutidas desde o caso mais simples $g(x) = ax^2$, tornando a compreensão do caso geral mais intuitiva e natural.

A formalização de que o gráfico da função quadrática é uma parábola foi feita de forma clássica. Conceitualmente, apresentou-se de forma explícita que o gráfico da função do 2º grau é uma parábola vertical definida geometricamente por uma reta diretriz horizontal (ou seja, uma reta com inclinação específica), evidenciando a relação entre esses dois objetos geométricos.

Para a visualização prática dessa relação, entre a função quadrática e a parábola, foram propostas duas atividades com o uso do *software GeoGebra*. Ressaltamos que a escolha da construção baseada em círculos e retas paralelas, realizada na primeira atividade, foi feita por aplicar a definição geométrica de equidistância da parábola de forma simples e visual. Já a segunda atividade teve o objetivo de mostrar ao estudante, de forma concreta, como o gráfico de uma função quadrática específica coincide com o lugar geométrico de uma parábola vertical, com foco e diretriz determinados pelos coeficientes da função, proporcionando assim um teste prático da teoria.

Dessa forma, este artigo apresentou um conjunto de ferramentas adaptáveis, contemplando da intuição à formalização rigorosa. O objetivo principal do trabalho é promover o enriquecimento conceitual, fortalecendo a compreensão do aluno sobre a estrutura da função e oferecendo novas perspectivas para a abordagem das propriedades do gráfico da função quadrática, contribuindo para um aprendizado mais significativo.

Referências

- [1] MODERNA (ed.). **Conexões**: matemática e suas tecnologias - funções e aplicações. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.
- [2] TEIXEIRA, L. A. (ed.). **Diálogo**: Matemática e suas tecnologias - funções e progressões. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.
- [3] PAPMEM - Janeiro de 2010 - Função Quadrática. [Apresentação]: Professor Wagner. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 1 vídeo (71 min). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Epqc0BF5ikM>. Acesso em: 25 nov. 2025.
- [4] AULA 45 - gráfico de uma Função Quadrática – Parte 1. [Apresentação]: Professor Gustavo Adolfo Soares. [Rio de Janeiro]: OBMEP, 2016. 1 vídeo (12 min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ZcaFrxEc_k. Acesso em: 25 nov. 2025.
- [5] LUCENA, R.; GITIRANA, V. Articulações internas à matemática: a parábola e a função quadrática com o geogebra. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 60, p. 25–34, 2018.
- [6] ROCHA, L. A. S.; POFFAL, C. A.; MENEGHETTI, C. M. S. A utilização de softwares no ensino de funções quadráticas. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, p. 19–35, 2015. Ed. Especial PROFMAT.

-
- [7] GÓMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. S. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017. (Coleção PROFMAT).
- [8] SOUSA, R. T. de; ALVES, F. R. V. Uma relação entre a álgebra e a geometria na parábola. **C.Q.D.** – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 22, n. 1, p. 16–34, 2022. Disponível em: <https://revistas.bauru.unesp.br/index.php/revistacqd/article/view/270>. Acesso em: 28 nov. 2025.